

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

**Struttura per scadenza, premi per il rischio e tassi attesi:
evidenza empirica dal mercato dell'eurolira**

di Francesco Drudi e Roberto Violi



Numero 311 - Luglio 1997

Temi di discussione

del Servizio Studi

La serie "Temi di discussione" intende promuovere la circolazione, in versione provvisoria, di lavori prodotti all'interno della Banca d'Italia o presentati da economisti esterni nel corso di seminari presso l'Istituto, al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

I lavori pubblicati nella serie riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità dell'Istituto.

Comitato di redazione:

MASSIMO ROCCAS, DANIELA MONACELLI, GIUSEPPE PARIGI, ROBERTO RINALDI, DANIELE TERLIZZESE, ORESTE TRISTANI, SILIA MIGLIARUCCI (segretaria).

**Struttura per scadenza, premi per il rischio e tassi attesi:
evidenza empirica dal mercato dell'euro lira**

di Francesco Drudi e Roberto Violi

Numero 311 - Luglio 1997

**STRUTTURA PER SCADENZA, PREMI PER IL RISCHIO E TASSI ATTESI:
EVIDENZA EMPIRICA DAL MERCATO DELL'EUROLIRA.**

di Francesco Drudi (*) e Roberto Violi (**)

Sommario

Il lavoro si propone di scomporre i rendimenti a scadenza della lira sull'euromercato nelle componenti di aspettativa e di premio per il rischio, imputabile alla volatilità dei tassi a breve, nel periodo 1991-95. L'analisi è stata condotta mediante l'impiego di modelli fattoriali di determinazione dei tassi di interesse sviluppati nella letteratura finanziaria. In particolare si è utilizzata una stima econometrica di un'estensione a due fattori del modello classico unifattoriale di Cox, Ingersoll e Ross, ove il secondo fattore corrisponde al livello di lungo periodo del tasso a breve.

Nel complesso, i risultati delle simulazioni portano a concludere che le componenti di premio per il rischio implicite nei tassi dell'eurolira risulterebbero relativamente contenute, e non spiccatamente variabili, nel periodo campionario preso in considerazione. Pertanto, le variazioni nel tempo dei rendimenti a scadenza tendono a essere dominate da mutamenti delle aspettative circa l'evoluzione futura dei tassi. Sulla base dei parametri stimati, il premio per il rischio non supererebbe i 30 centesimi per le scadenze fino a 5 anni. Inoltre, anche durante le fasi di maggiore turbolenza dei tassi, le oscillazioni del premio sembrano essere state relativamente contenute. Le fasi in cui si sarebbe osservata una tendenza all'ampliamento del premio hanno interessato il secondo semestre del 1993, il primo e l'ultimo trimestre del 1994 e il secondo trimestre del 1995. Solo in quest'ultima fase, tuttavia, l'aumento del premio ha coinciso con un incremento di volatilità del tasso a breve.

(*) Banca d'Italia, distaccato presso la Banca Mondiale.

(**) Banca d'Italia, Servizio Studi.

Indice

1. Introduzione	p. 9
2. Scomposizione dei rendimenti a scadenza	p. 11
2.1 Scomposizione in tempo continuo	p. 11
2.2 La scomposizione dei rendimenti in tempo discreto	p. 13
3. Modelli di struttura per scadenza	p. 15
3.1 Il modello di Cox, Ingersoll e Ross a un fattore.	p. 15
3.2 Il modello con tendenza centrale stocastica	p. 19
4. Le stime dei modelli	p. 22
4.1 Specificazione econometrica del modello a due fattori	p. 22
4.2 Un modello GARCH(1,1) per il tasso a breve	p. 24
4.3 Le stime del modello CIR a uno e due fattori	p. 25
4.3.1 Stime dei processi dei tassi di interesse .	p. 25
4.3.2 Stime dei premi al rischio e scomposizione dei rendimenti	p. 28
4.3.3 La distorsione nella stima dei parametri derivanti dalla presenza di radici (quasi-)unitarie nei tassi di interesse ...	p. 31
4.4 Stime del modello GARCH(1,1)	p. 32
5. Esercizi di statica comparata	p. 34
6. Conclusioni	p. 35
Tavole e figure	p. 38
Riferimenti bibliografici	p. 53

1. Introduzione¹

Le informazioni contenute nella struttura per scadenza dei tassi d'interesse offrono indicazioni circa le attese dei mercati sull'evoluzione futura dei tassi. Nella letteratura sviluppata negli ultimi anni sono stati utilizzati prevalentemente due approcci nell'estrazione di informazione dalla struttura dei tassi. Da un lato, una linea di ricerca più ancorata all'analisi macroeconomica ha analizzato le possibili varianti dell'ipotesi formulata nella *expectations theory* per la determinazione dei tassi. Tale filone ha privilegiato lo studio del nesso tra proprietà di breve e di lungo periodo dei tassi, in relazione alla dimensione dei premi per il rischio (Campbell e Shiller, 1987). Una seconda linea di ricerca, maturata nella letteratura finanziaria, ha concentrato lo sforzo analitico nella determinazione dei parametri che influenzano le possibili configurazioni della struttura per scadenza, quali la sua inclinazione e curvatura. Di norma, questa letteratura assume che le proprietà di lungo periodo dei tassi di interesse siano compatibili con l'ipotesi di stazionarietà dei fattori che influiscono sulla struttura per scadenza. L'interesse principale di quest'ultimo approccio è costituito dall'individuazione dei nessi tra fattori

1. Una precedente versione di questo lavoro è stata presentata al convegno "Monetary Policy and the Term Structure of Interest Rates", presso l'Università Bocconi di Milano, nel giugno del 1996. Si ringraziano i partecipanti al convegno, in particolare Jim Steeley, George Pennacchi, Glenn Rudebusch, Renzo Avesani e Carlo Favero, per i suggerimenti formulati e le osservazioni critiche. Siamo grati a Antonio Di Clemente e Maria Pia Mingarini per la collaborazione nella preparazione delle tavole e dei grafici. Resta inteso che la responsabilità degli errori è soltanto nostra.

economici e determinanti della configurazione della struttura per scadenza; la trattazione analitica di tali nessi è essenziale per scomporre il livello dei tassi nelle componenti di premio al rischio e di aspettativa.

In questo lavoro conduciamo un'analisi empirica dei premi al rischio impliciti nella struttura per scadenza, mediante l'impiego di recenti modelli sviluppati nella letteratura finanziaria, al fine di individuare la componente di remunerazione di rischio di tasso implicita nei rendimenti a diversa scadenza. Dall'osservazione dei rendimenti per scadenza è possibile identificare i tassi a termine per orizzonti temporali futuri. Tali tassi, tuttavia, non bastano a isolare le aspettative di rendimento futuro, in quanto, oltre alle attese, anche i premi al rischio e il grado di curvatura del profilo dei rendimenti per scadenza concorrono alla determinazione dei tassi *forward*. L'identificazione di queste ultime componenti richiede necessariamente la formulazione esplicita di un modello dinamico di determinazione dei tassi di interesse.

In questo lavoro viene applicato un modello a due fattori della struttura per scadenza dei tassi di interesse, dove si assume che il tasso a breve termine tenda, con una certa velocità, verso un valore di lungo periodo, anch'esso stocastico. Sia il tasso a breve sia il valore di lungo periodo sono rappresentati da processi stocastici a radice quadrata. Tale specificazione ci permette di effettuare una stima dei parametri che determinano la dimensione delle aspettative e della variabilità quali sono desumibili dai tassi di interesse. In tale modo, può essere valutata

l'importanza relativa di aspettative e variabilità sulla forma della struttura per scadenza.

Il lavoro è organizzato come segue. Nel paragrafo 2 viene presentata la scomposizione dei rendimenti nelle sue componenti, con capitalizzazione continua e discreta. Nel paragrafo 3 sono presentati i modelli finanziari di struttura per scadenza, utilizzati nell'analisi empirica. Nel paragrafo 4 viene effettuata la verifica econometrica dei modelli teorici illustrati nel paragrafo 3, procedendo all'identificazione dei premi per il rischio e delle attese implicite nei tassi dell'euro lira fino a 5 anni. Nel paragrafo 5 vengono presentati alcuni esercizi di perturbazione dei parametri stimati nel paragrafo precedente, per analizzare l'effetto sui premi al rischio di diversi valori dei parametri. Il paragrafo 6 riassume le principali conclusioni del lavoro.

2. Scomposizione dei rendimenti a scadenza

2.1 *Scomposizione in tempo continuo*

I tassi a termine, calcolati dalla struttura per scadenza, differiscono da quelli attesi a causa di premi al rischio ed effetti di convessità. Per analizzare la differenza fra tassi a termine e attesi, introduciamo la seguente notazione. Si consideri il prezzo di un titolo privo di cedole (cfr. par. 2) in scadenza al tempo T . In tempo continuo può essere rappresentato come:

$$P(t, T) = \exp(-y(T-t))$$

dove $P(t, T)$ è il prezzo del titolo e y il rendimento a scadenza composto nel continuo. Possiamo esprimerlo nei termini dei tassi istantanei a termine nel seguente modo:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right)$$

dove $f(t, s)$ è il tasso a termine istantaneo per il tempo s . In questo caso vale la seguente relazione:

$$y = \frac{\int_t^T f(t, s) ds}{T - t}.$$

Nel caso in cui vale l'ipotesi di aspettative non distorte (cioè $Er(s) = f(t, s)$ per ogni s), avremo:

$$y = \frac{\int_t^T Er(s) ds}{T - t}$$

dove $Er(s)$ è l'attesa del tasso istantaneo a pronti al tempo s .

Se la teoria delle aspettative non distorte viene rigettata, come suggerito anche dalla evidenza empirica, deve comparire un cuneo fra i tassi attesi futuri e quelli a termine. In particolare, avremo $f(t, s) = Er(s) + \pi(s)$, dove $\pi(s)$, nella teoria tradizionale della struttura per scadenza, era talvolta indicato come premio di liquidità. Tuttavia, nelle

moderne teorie finanziarie della struttura per scadenza, $\pi(s)$ viene scomposto in due termini; il primo viene posto in relazione al rischio di tasso d'interesse, il secondo, indicato con il termine di convessità, dipende dalla inclinazione della curva dei tassi di interesse. In base alla scomposizione proposta, possiamo misurare:

- per il tasso a termine, la componente di aspettativa $Er(s)$, e pertanto identificare lo *spread* con $f(t,s)$, $\pi(s)$;
- per i rendimenti a lungo termine, la componente di aspettativa espressa quale media dei tassi futuri attesi, che ci permette di identificare $\int_t^T \pi(s)ds$.

A livello teorico, l'importanza della deviazione dall'ipotesi delle aspettative non distorte, anche con neutralità al rischio, è stata sottolineata da Cox, Ingersoll e Ross (1981) per i modelli di equilibrio della struttura per scadenza. Questa proposizione è di fondamentale importanza anche nelle applicazioni empiriche il cui scopo sia quello di estrarre le informazioni contenute nella struttura per scadenza dei tassi di interesse.

2.2 La scomposizione dei rendimenti in tempo discreto

La scomposizione dei rendimenti in tempo discreto può essere utile per ovviare ad alcuni problemi che possono sorgere nell'analisi empirica. In primo luogo, la non osservabilità dei tassi istantanei. In secondo luogo, nel caso

in cui non esista una forma chiusa dei prezzi dei titoli, come avviene per il modello presentato nel paragrafo 3, la versione discretizzata è utile per condurre un esercizio di simulazione.

Si consideri il prezzo del titolo privo di cedole in scadenza al tempo T , valutato a una data intermedia t_1 . Il prezzo a termine, calcolato a t_1 , di un titolo senza cedole emesso a t e in scadenza a T è:

$$(1) \quad P^f(t_1, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, t_1)} = \frac{\exp(-y_T (T-t))}{\exp(-y_{t_1} (t_1-t))} = \exp(-y_{t_1, T}^f (T-t_1))$$

dove $y_{t_1, T}^f$ è il tasso a termine fra t_1 e T .

Pertanto, il rendimento fra t e T può essere scomposto come:

$$(2) \quad y_T = \frac{y_1(t_1-t) + y_{t_1, T}^f(T-t_1)}{T-t}.$$

Se i due intervalli (t_1-t) e $(T-t_1)$ hanno medesima ampiezza, avremo:

$$(3) \quad y_T = \frac{1}{2}(y_1 + y_{t_1, T}^f) = \frac{1}{2}(y_1 + E(y_{t_1, T}) + \pi_{t_1}).$$

Estendendo la (3) al caso di più di 2 intervalli, si può ottenere la scomposizione di un tasso a 10 anni a pronti in 120 tassi mensili, scritta come:

$$(4) \quad \frac{\sum_0^{119} y_{i,i+1}^1}{120} = \frac{\sum_1^{120} E(y_i^1) + \pi_i}{120}$$

$y_{i,i+1}^1$ è il tasso a termine a un mese fra il tempo i e il tempo $i+1$ (uguale a quello a pronti per $i=0$), $E(y_i^1)$ è il tasso a un mese atteso al tempo i (uguale a quello a pronti per $i=1$) e π_i è la differenza fra il tasso a termine e quello atteso per il tempo i .

3. Modelli di struttura per scadenza

3.1 Il modello di Cox, Ingersoll e Ross a un fattore

Il ben noto modello di Cox, Ingersoll e Ross (1985) (CIR) costituisce un semplice esempio di modello fattoriale per l'analisi della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Esso incorpora, mediante una parametrizzazione molto semplice della dinamica del tasso istantaneo, le componenti essenziali che influenzano la struttura per scadenza. CIR ipotizza che il tasso istantaneo privo di rischio, r , sia descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica, in tempo continuo:

$$(5) \quad dr = k(\vartheta - r)dt + \sigma r^{1/2} dz$$

dove ϑ è il tasso di interesse, costante, verso cui tende il tasso a breve (tasso tendenziale o tendenza centrale); κ la velocità di aggiustamento del tasso r da scostamenti dal tasso costante di lungo periodo; σ è il parametro di variabilità e

$dz(t)$ un disturbo stocastico di Wiener (con media nulla e varianza unitaria).

Mediante la considerazione di relazioni di equilibrio, o di arbitraggio, si deriva il prezzo di un titolo senza cedole al tempo t con scadenza T :

$$(6) \quad P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

dove:

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma (\exp(k + \lambda + \gamma)(T-t)/2)}{(\gamma + \lambda + k)(\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \right)^{(2k\theta / \sigma^2)}$$

$$(7) \quad B(t, T) = \left(\frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\gamma + \lambda + k)(\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \right)$$

$$\gamma = ((k + \lambda)^2 + 2\sigma^2)^{1/2}$$

λ è un parametro di premio al rischio (prezzo del rischio); il premio per scadenza, per un titolo di vita residua pari a τ ($=T-t$), è pari:

$$-\lambda B(\tau) r.$$

Nel caso ci si attenga a una interpretazione di equilibrio generale del modello, λ influenza negativamente il prezzo del titolo (premio positivo) nel caso, usuale, di covarianza negativa fra tassi e ricchezza.

Il prezzo del titolo risulta influenzato negativamente dalle attese di lungo periodo di tasso (9). Il parametro di

variabilità del tasso istantaneo, σ , contribuisce a determinare la volatilità del prezzo del titolo, che è data da

$$B(\tau)\sigma\sqrt{r}.$$

Sulla base del processo proposto è possibile esprimere le attese dei tassi a breve in futuro a un generico tempo s , condizionate all'osservazione del tasso corrente al tempo t :

$$(8) \quad E(r(s)|r(t)) = r(t)\exp(-k(s-t) + \vartheta(1 - \exp(-k(s-t))) .$$

Le attese di tasso sono influenzate dal tasso corrente, in quanto il processo è di carattere autoregressivo, e da quello prevalente nel lungo periodo; al crescere del tempo il tasso a breve si avvicina al livello stazionario di lungo periodo.

L'espressione per il tasso a termine istantaneo è in questo caso:

$$(9) \quad f(t,s) = r + (k(\vartheta - r) - \lambda r)B(t,s) - \frac{1}{2}\sigma^2 r B^2(t,s) .$$

Lo *spread* fra tassi a termine e futuri attesi

$$(10) \quad \pi(t,s) \equiv f(t,s) - E(r(s)|r(t))$$

può essere scomposto in una componente di premio dipendente dal parametro λ e pari a:

$$(11) \quad -\lambda r B(t, s) + k(\vartheta - r)(B(t, s) - \hat{B}(t, s)) - \frac{1}{2} \sigma^2 (B(t, s)^2 - \hat{B}(t, s)^2)$$

e un effetto di convessità:

$$(12) \quad k(\vartheta - r) \hat{B}(t, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{B}(t, s)^2 r - [r(t) - \vartheta](1 - \exp(-k(s - t)))$$

dove

$$\hat{B}(t, s) \equiv \frac{2(\exp(\gamma^*(T - t)) - 1)}{(\gamma^* + k)(\exp(\gamma^*(T - t)) - 1) + 2\gamma^*}$$

$$\gamma^* \equiv (k^2 + 2\sigma^2)^{1/2}.$$

Passando a considerare la scomposizione in tempo discreto, l'espressione per il rendimento a pronti a un mese è:

$$y^1 = -(\log(A(1)) - B(1)r(t))12$$

dove $A(1)$ e $B(1)$ sono i parametri associati al titolo a sconto a un mese. Il valore atteso del tasso a un mese al tempo s risulta essere:

$$E(y^1 r(t)) = -(\log(A(1)) - B(1)E(r(s) r(t)))12.$$

Il tasso a termine a un mese prevalente al tempo s può essere espresso come:

$$(13) \quad y_{s,1}^f = -\log\left(\frac{P(t,s+\frac{1}{12})}{P(t,s)}\right)12$$

dove $P(t,s+\frac{1}{12})$ è il prezzo di uno zero che scade un mese dopo il tempo s .

3.2 Il modello con tendenza centrale stocastica

L'ipotesi di costanza nel tempo del tasso di lungo periodo sembra una limitazione notevole del modello di CIR a un fattore. Oltre a imporre correlazione unitaria fra i titoli a diversa scadenza, occorre ricordare che i prezzi dei titoli risultano sensibili al livello ipotizzato di θ il livello di lungo periodo del tasso a breve². L'ipotesi di mancanza nel tempo di θ , mentre risulta ragionevole nel caso di tassi reali, appare molto meno plausibile nelle applicazioni del modello CIR ai tassi nominali. Un modo per allentare la restrizione sull'andamento di lungo periodo consiste nel lasciare che il valore di lungo periodo del tasso nominale a breve termine si cambi nel tempo.

Questa ipotesi, seguendo un suggerimento avanzato in CIR, è stata sviluppata e sottoposta a verifica empirica da Balduzzi, Das e Foresi (1995); essi estendono il modello unifattoriale sviluppando una versione a due fattori³, nella

2. A conferma di questa considerazione, si vedano le simulazioni condotte in Bianchi, Cesari, e Panattoni (1994).

3. Tale modello è stato applicato dagli autori al caso americano.

quale si ipotizza che il tasso a breve di lungo periodo (il tendenziale) non sia costante, ma muti nel tempo. I movimenti di tale tasso, indicato con θ , sono regolati da un processo stocastico dello stesso tipo di quello ipotizzato per il livello corrente del tasso - cioè *mean-reverting* e *square-root* nella varianza

$$(14) \quad \begin{aligned} d\theta &= (m_0 - m_1\theta)dt + \sqrt{s_0^2 + s_1^2\theta} d\omega \\ m_0 &\equiv m_1\vartheta \end{aligned}$$

dove m_1 misura la velocità di aggiustamento di θ , che nel breve periodo è una variabile stocastica, al livello stazionario di lungo periodo ϑ . s_0 e s_1 sono parametri di variabilità e $d\omega(t)$ rappresenta un disturbo stocastico di Wiener. L'equazione per il tasso istantaneo, in forza della variabilità del tasso di lungo periodo ipotizzata nella (13), è generalizzabile nel modo seguente:

$$(15) \quad dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\sigma_1^2 r + \sigma_2^2 \theta} dz$$

dove σ_1 e σ_2 sono parametri di variabilità che misurano la sensitività della variabilità del tasso a breve a variazioni, rispettivamente, nel livello corrente e di lungo periodo del tasso stesso.

Si assume che il prezzo di un titolo privo di cedola sia funzione di due fattori, il livello corrente e di lungo periodo del tasso a breve; l'equazione alle derivate parziali che tale prezzo, $P(t, r, \theta, T)$, deve soddisfare è data da

$$(16) \quad E_t(D^y P) - rP - r\lambda P_r' - lP_\theta' = 0$$

dove D^y rappresenta l'operatore differenziale (stocastico) di Dynkin e il parametro l , costante e indipendente dalla scadenza, il prezzo del rischio attribuito al fattore θ .

Il prezzo del titolo può essere rappresentato con la seguente espressione

$$(17) \quad P(r, \theta, \tau) = \exp[-A(\tau) - B(\tau)r - D(\tau)\theta]$$

$$\tau \equiv T - t.$$

Differenziando tale espressione e sostituendola nell'equazione alle derivate parziali, si ottiene la seguente equazione:

$$(18) \quad B(\tau)[\kappa\theta - (\kappa + \lambda)r] + \frac{1}{2} B^2(\tau)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) + D(\tau)(m_\theta + m_r\theta - l\theta) + \frac{1}{2} D^2(\tau)(s_0^2 r + s_1^2 \theta) + D(\tau)\sigma_{r,\theta} - A_\tau'(\tau) - B_\tau'(\tau)r - D_\tau'(\tau)\theta - r = 0$$

dove $\sigma_{r,\theta}$ è la covarianza tra il livello corrente e il livello di lungo periodo del tasso a breve. Per risolvere l'equazione alle derivate parziali, assumiamo che il tasso istantaneo e la tendenza di esso non siano correlati. Sotto tale ipotesi, l'equazione può essere separata nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$B(t)(-(k + \lambda)) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 B^2(t) - B'(t) - 1 = 0$$

$$(19) \quad B(t)k + \frac{1}{2} \sigma_2^2 B^2(t) + D(t)(m_l - l) + \frac{1}{2} D^2(t)s_1^2 - D'(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2 B^2(t) + D(t)m_0 + \frac{1}{2}D(t)^2 s_0^2 - A(t) = 0.$$

La prima equazione della (19) coincide con quella usuale del modello di CIR e pertanto ha soluzione nota per l'incognita $B(\tau)$. La seconda equazione risulta essere non autonoma e con termini non lineari. Essa può venire risolta con metodi numerici; la terza equazione può venire risolta congiuntamente alla seconda.

La seconda e la terza equazione della (19) sono state risolte utilizzando il metodo numerico di Runge-Kutta⁴. Tale soluzione permette di determinare i termini $D(\tau)$ e $A(\tau)$ per ciascuna scadenza, al fine di calcolare i prezzi dei titoli privi di cedola.

4. Le stime dei modelli

4.1 Specificazione econometrica del modello a due fattori

La stima econometrica dei parametri viene effettuata approssimando in tempo discreto, con dati giornalieri, l'equazione (14) come segue⁵:

-
4. Il metodo di Runge-Kutta prevede l'avanzamento della funzione da un punto al successivo utilizzando 4 valutazioni per passo, secondo la metodologia di Press e altri (1988), cap. 15.1. Nel nostro caso, sono state considerati 6 passi per mese, generando parametri relativi a titoli con scadenza fino a 10 anni.
 5. La metodologia è mutuata da Chan, Karolyi, Longstaff e Sanders (1992); cfr. inoltre Bianchi, Cesari e Panattoni (1994) per una valutazione comparata di alcuni metodi alternativi di stima del modello CIR mediante metodi di stima indiretta.

$$(20) \quad \begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= (\kappa / 365)(\theta_t - r_t) + \sqrt{(\sigma_1^2 / 365)r_t + \sigma_2^2 / 365} \theta_t \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} &= N(0,1) \end{aligned}$$

dove la proxy utilizzata per r è il tasso Libor a un mese. Il tasso tendenziale θ_t viene lasciato variare nel tempo; data la struttura affine dei rendimenti dei titoli senza cedola rispetto ai fattori, il tasso θ_t può venire "estratto", come suggerito da Balduzzi, Das e Foresi (1995), dai prezzi dei titoli in base alla seguente relazione:

$$(21) \quad \theta_t = \theta_0 + \theta_1 [\tau_1 Y(t; \tau_1) B(\tau_2) - \tau_2 Y(t; \tau_2) B(\tau_1)]$$

dove $Y(t; \tau_1)$ e $Y(t; \tau_2)$ sono i rendimenti per i titoli, scelti arbitrariamente, con scadenza τ_1 e τ_2 . Sulla base delle relazioni precedenti, viene pertanto minimizzata la funzione di verosimiglianza associata all'equazione del tasso a breve:

$$(22) \quad \begin{aligned} & -0,5 \sum_t [\ln \sigma_{t+1}^2 + \varepsilon_{t+1}^2] \\ \sigma_{t+1}^2 & \equiv (\sigma_1^2 / 365) r_t + (\sigma_2^2 / 365) \theta_t. \end{aligned}$$

Per ottenere a ogni data il valore θ_t , nella stima vengono utilizzati nella (21) i rendimenti a scadenza di titoli privi di cedole impliciti nei tassi swap dell'euromercato per le scadenze a un anno e a due anni⁶.

6. La scelta delle scadenze deve conciliare l'esigenza di sfruttare il contenuto informativo delle scadenze più lontane con la precisione della stima; quest'ultima tende a risentire della non linearità di θ nei parametri, magnificata dalla differenza nelle scadenze.

Data l'approssimazione lineare per la determinazione della tendenza centrale, la stima dei parametri del processo stocastico del tasso di lungo periodo avviene mediante la seguente discretizzazione della (14):

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= (m_0 / 365) + [1 - (m_1 / 365)]\theta_t + \sqrt{(s_0^2 / 365) + (s_1^2 / 365)}\theta_t \omega_{t+1} \\ (23) \quad \omega_{t+1} &= N(0,1) \\ m_0 &\equiv m_1 \vartheta . \end{aligned}$$

Dalle restrizioni nei parametri della (18) e della (24), si ottengono tre modelli di tipo CIR:

MODELLO A 1 FATTORE:		
CIR, θ	costante	$\sigma_2 = \theta_2 = s_0, s_1 = 0; \theta = \vartheta$
MODELLO A 2 FATTORI:		
θ_t variabile, σ_t	funzione di r_t	
$\sigma_2 = 0$		(versione 1)
θ_t variabile, σ_t	funzione di θ_t	
$\sigma_1 = 0$		(versione 2)

4.2 Un modello GARCH(1,1) per il tasso a breve

Alle tre varianti del modello CIR, si aggiunge, a fini di confronto, la stima di un modello GARCH(1,1), di uso ricorrente nella letteratura finanziaria, per cogliere gli

effetti dei mutamenti nella variabilità (condizionale) dei tassi⁷. In tale modello l'eteroschedasticità della variabilità è regolata da uno schema autoregressivo (convergente), comprendente gli shock sul livello corrente del tasso:

$$\begin{aligned}
 r_{t+1} &= c_0 + c_1 r_t + \varepsilon_{t+1} \\
 (25) \quad V_{t+1} &= \alpha_0 + \alpha_1 V_t + \beta_1 \varepsilon_t^2 \\
 \varepsilon_{t+1} &= N(0, V_{t+1} \Omega_t)
 \end{aligned}$$

4.3 Le stime del modello CIR a uno e a due fattori

4.3.1 Stime dei processi dei tassi di interesse

Prima di procedere alla stima dei processi dei tassi di interesse, è stata condotta una indagine preliminare sulle caratteristiche statistiche dei tassi di interesse utilizzati per le stime. L'evidenza empirica di altri paesi⁸ suggerisce che il numero di fattori di rischio che spiegano più del 95 per cento della variazione dei rendimenti sono tipicamente 2 e solo in casi eccezionali 3. Nel periodo considerato, utilizzando i tassi sul mercato dell'eurolira a 1 mese e 3 mesi, e i tassi swap in lira da 1 a 5, 7 e 10 anni, circa il 90 per cento della varianza, misurata nei termini della correlazione con le componenti principali, può essere spiegata dal primo fattore. Con l'aggiunta di un secondo fattore, circa il 99 per cento della varianza dei tassi di interesse può essere spiegata dalle componenti principali. Pertanto, un

7. Cfr. ad esempio, Sheikh (1993) e, per un'applicazione al caso italiano, Fornari e Mele (1994).

8. Cfr. Litterman e Scheinkman (1991) per gli Stati Uniti, Carvehill e Strickland (1992) per il Regno Unito.

modello a due fattori sembra avere il potenziale per spiegare la variabilità presente nei dati utilizzati.

Gli usuali test sulla presenza di radici unitarie tendono a non rigettare l'ipotesi di non stazionarietà del tasso a un mese fino al 10 per cento di soglia critica⁹; tuttavia il carattere limitato della potenza di questi test, rende la dinamica del tasso a breve non incompatibile con l'ipotesi di *mean reversion*¹⁰. L'entità della distorsione delle stime effettuate in questo paragrafo dovuta alla presenza di radici quasi-unitarie nei rendimenti è analizzata nel paragrafo 4.3.3.

Nelle stime econometriche, riportate nelle tavole 1 e 2, rispettivamente per il periodo 1991.1 e 1995.12 e per il sottoperiodo 1992.10-1995.12 (al fine di isolare il periodo di fluttuazione del cambio della lira), il tasso istantaneo, non osservabile, è approssimato con il tasso Libor a un mese e, in prima approssimazione, si assume che il prezzo del rischio del modello unifattoriale, λ , sia pari a zero. Tale ipotesi è corroborata da esercizi di calibrazione del modello rispetto a tale parametro, che hanno evidenziato la scarsa sensitività della funzione di verosimiglianza da tale parametro.

9. Sui problemi posti dalla presenza di radici unitarie nei tassi di interesse, si rinvia a Hall, Anderson e Granger (1992) e a Gonzalo e Granger (1995).

10. I test effettuati, qui non riportati, sono stati eseguiti mediante il comando COINT del TSP versione 4.3. Tutte le stime riportate nel seguito sono state effettuate in TSP utilizzando il comando ML; gli errori standard riportati sono calcolati mediante la procedura di Berndt-Hall-Hall-Hausman per il calcolo della matrice delle covarianze dei parametri.

I parametri, nel complesso, sono stabili nel periodo campionario di stima; essi tuttavia tendono a differire dalla versione classica di CIR, nell'ipotesi di θ variabile (tav. 1). In particolare, la velocità di aggiustamento, κ , verso il tasso di lungo periodo, pari mediamente a poco meno di 4 mesi ($=12/3,34$) per il modello CIR unifattoriale, tende a salire fino a quasi dimezzare il tempo di aggiustamento del tasso nel modello a due fattori ($=12/6,1923$). La maggiore rapidità dell'aggiustamento appare in linea con l'intuizione secondo cui il ritorno del tasso a breve verso il livello di lungo periodo può essere agevolato dalla mobilità di quest'ultimo.

La stima del tasso stazionario di lungo periodo, nel modello CIR a un fattore, non al 10,93 per cento, presenta un'escursione assai ampia nel periodo, se valutata con i modelli a due fattori. In particolare, utilizzando la versione (1) del modello a due fattori, che nel campione presenta la stima della verosimiglianza più elevata, il tasso di lungo periodo oscilla tra il 6,9 e il 13 per cento; l'escursione sarebbe ancor più ampia se valutata con la versione (2) del modello a due fattori. Quest'ultimo differisce dalla versione (1), in quanto la variabilità del tasso istantaneo è funzione del tasso di lungo periodo e non del livello corrente del tasso stesso. Tale distinzione sembra tuttavia meno rilevante nel determinare la dinamica del tasso a breve nel sottocampione che esclude il periodo precedente la crisi valutaria del 1992; in tale periodo i due modelli sono pressoché indistinguibili nel livello della funzione di verosimiglianza e valori stimati, sebbene permanga la differenza nella precisione delle stime dei singoli parametri,

più accurata per la versione (2). Complessivamente, le stime del modello (2) assicurano un intervallo di valori più plausibile per la tendenza centrale, θ , che quelle della versione (1), senza alterare significativamente la dimensione dello *spread* fra tassi a termine e futuri attesi. Pertanto, quest'ultima versione del modello a due fattori è stata scelta per gli esercizi di statica comparata del paragrafo 5.

Nel grafico (1) viene riportato il valore simulato del tasso a un mese di lungo periodo (privo di rischio) nell'intervallo campionario. Esso appare non dissimile dal tasso *forward* tra 4 e 5 anni, confermando l'intuizione che quest'ultimo tasso sia legato all'andamento prospettico di lungo termine del tasso a breve. Rispetto al *forward*, tuttavia, si può rilevare una minore prontezza del tasso di lungo periodo a reagire al rialzo dei tassi all'inizio del 1994, accompagnata da una riduzione più pronunciata nel 1993. Infine, è forse interessante rilevare che, a differenza del *forward* a 5 anni, il tasso a un mese di lungo periodo è rientrato nel corridoio dei tassi ufficiali nel quarto trimestre del 1995.

4.3.2 *Stime dei premi al rischio e scomposizione dei rendimenti*

Per ottenere una scomposizione dei rendimenti lungo le linee suggerite nel paragrafo 2, abbiamo proceduto in primo luogo alla determinazione dei premi al rischio λ e l . A tale fine sono stati utilizzati i tassi Libor dell'eurolira con scadenza 1, 3, 6, 12 mesi e i tassi swap eurolira con scadenze

da 2 a 10 anni¹¹. I parametri di rischio sono stati ricavati minimizzando le differenze quadratiche fra i prezzi dei titoli a sconto derivati dai tassi eurolira e i prezzi teorici. Poiché, per il modello a due fattori, non è possibile ottenere in forma chiusa i prezzi teorici dei titoli, è stata utilizzata una metodologia numerica per risolvere l'equazione alle derivate parziali di determinazione del prezzo, calcolata nel vettore stimato dei parametri $\{\kappa, \sigma_1, s_0, s_1, m_0, m_1\}$. I valori ottenuti per il campione di stima sono stati pari -0,1 e 0 per λ e l , associati rispettivamente al tasso istantaneo e alla tendenza centrale.

Quale secondo passo, sono stati generati i tassi a termine impliciti nei prezzi teorici, calcolati utilizzando i valori ottenuti dei premi al rischio, e quelli dei valori attesi dei tassi, simulati sulla base delle equazioni di evoluzione dei tassi del paragrafo 3. Per il modello a due fattori, una procedura di simulazione Montecarlo è stata applicata considerando 4.000 replicazioni estratte a intervalli quindicinali.

Una volta ottenuti i tassi a termine e attesi, è stata pertanto effettuata la scomposizione del rendimento di un titolo a 5 anni, sottraendo alla media dei tassi a termine a un mese la media dei tassi attesi a un mese. L'evoluzione nel tempo di tale misura è stata riportata nella figura 3. Per

11. Quali tassi swap sono state utilizzate le quotazioni effettuate sul circuito Reuters da InterCapital Brokers di Londra. Ringraziamo il collega Luigi Buttiglione per le correzioni e integrazioni da lui effettuate al data-set. I prezzi dei titoli zero-coupon sono stati ricavati sulla base di una metodologia recursiva standard.

l'orizzonte quinquennale il premio totale è stato in media pari a circa 20 centesimi su base annua. Per i tassi a un anno, il premio richiesto è stato leggermente inferiore e attorno a 15-20 centesimi (fig. 4)¹².

L'esercizio è stato ripetuto per il modello a un fattore, basato anch'esso sulle stime presentate nel paragrafo 4.3.1 e di un valore di λ pari a -0,1, ottenuto sulla base dei prezzi teorici calcolati sulla base della soluzione in forma chiusa proposta da CIR. Le differenze fra tassi a termine e attesi in un orizzonte quinquennale sono leggermente cresciute e sono state di poco superiori ai 30 centesimi.

Complessivamente, i due modelli suggeriscono che la differenza fra tassi attesi e a termine non è eccessiva. Ciò indica che, per effetti di convessità non troppo pronunciati - quale dovrebbe essere il caso per scadenze fino a 5 anni - i premi al rischio non sono troppo elevati. Inoltre, le fluttuazioni dei premi sono abbastanza contenute, anche se in diverse fasi temporali (alla fine del 1993, nel primo e quarto trimestre del 1994 e nel secondo del 1995) essi si sono significativamente accresciuti. Per analizzare quanto tali risultati siano sensibili ai valori ottenuti delle stime dei parametri, nel paragrafo 5 è stato condotto un esercizio di statica comparata.

12. È stata effettuata una scomposizione dei rendimenti anche utilizzando i tassi *overnight*; i risultati ottenuti, qui non riportati per ragioni di spazio, sono pressoché analoghi.

4.3.3 *La distorsione nella stima dei parametri derivanti dalla presenza di radici (quasi-)unitarie nei tassi di interesse*

Nei modelli fattoriali di determinazione dei tassi la presenza di radici prossime all'unità nei processi stocastici che generano i rendimenti nominali tende a distorcere verso l'alto la stima della velocità di aggiustamento ai valori di lungo periodo. Questa distorsione può persistere anche in campioni di lunghezza maggiore di quella normalmente disponibile per le analisi empiriche. Il problema sotto il profilo econometrico non è trascurabile, in quanto, come mostrato nelle simulazioni del paragrafo 5, i premi al rischio sono assai sensibili alla velocità di aggiustamento dei tassi. Tuttavia va precisato che tale distorsione può essere in parte attenuata, utilizzando in maniera appropriata l'informazione contenuta nella struttura per scadenza dei rendimenti¹³.

Per valutare l'entità di tale distorsione nelle stime, abbiamo condotto uno studio di simulazione per analizzare le proprietà statistiche delle stime di massima verosimiglianza dei modelli a uno e due fattori. In particolare, è stato condotto un esercizio di stima dei parametri di tipo *bootstrapping*. Mediante il metodo Montecarlo, sono stati generati 200 campioni di osservazioni, su un orizzonte temporale di 100 anni, utilizzando il modello (20-23) nella versione unifattoriale e bifattoriale. Le serie simulate vengono utilizzate per ristimare i parametri su un campione di estensione pari a quella dei dati osservati (5 anni). L'esercizio viene ripetuto fino a ottenere una stima dei

13. Cfr. Ball e Torous (1996).

parametri sull'orizzonte di 100 anni tali da replicare la stima econometrica ottenuta sui dati osservati restringendo l'orizzonte della stima a 5 anni. I parametri stimati sull'orizzonte di 100 anni sono riportati nella tavola 4. La distorsione rispetto alle stime econometriche sui dati osservati è limitata, come detto sopra, alla velocità di aggiustamento del tasso a breve, il cui valore, pari a 1,65, è circa la metà di quello stimato. La stima degli altri coefficienti rimane sostanzialmente invariata.

Per il modello a due fattori, la distorsione della velocità di aggiustamento del tasso a breve scende rispetto al modello unifattoriale; il valore simulato è pari a 5,7, rispetto a un valore stimato di 6,2. Tuttavia, una distorsione più rilevante emerge per la velocità di aggiustamento e per il valore di lungo periodo della tendenza centrale. La velocità di aggiustamento scende da 1,53 a 0,8; la media di lungo periodo della tendenza centrale si riduce da 8,3 a 5,2 (tav. 4).

4.4 *Stime del modello GARCH(1,1)*

Le stime del modello GARCH(1,1) non sembrano migliorare quelle ottenute con le tre versioni del modello CIR; esse sembrano anzi inferiori nel campione considerato, poiché la stima della varianza considerata di lungo periodo non è convergente, in quanto la somma dei coefficienti $(\alpha_1 + \beta_1)$ è superiore all'unità (cfr. Hamilton, 1994, p. 666). Di conseguenza, non è ben definita la corrispondente varianza non condizionata

$$(26) \quad \sigma_{nc}^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1),$$

che risulta infatti negativa. Il problema non sorge per la stima del modello CIR tradizionale, la cui variabilità non condizionata di lungo periodo, espressa da

$$(27) \quad \sigma_{nc} = \sigma_1 \sqrt{0,5(\vartheta / \kappa)}$$

è pari nel campione al 6,2 per cento. Considerazioni simili valgono per la versione estesa di CIR, con tasso di lungo periodo variabile. Essa, ottenuta dalle stime dei parametri della (21), riportate nella tavola 7, è data da

$$(28) \quad \sigma_{nc}^\theta = s_1 \sqrt{-0,5(\vartheta / m_1)}.$$

Essa è risultata essere pari, nel campione, all'1,8 per cento.

Nel sottoperiodo che esclude la crisi valutaria, la anomalia nella stima GARCH della varianza non condizionale viene meno. Pertanto, il confronto della variabilità condizionale GARCH e quella stimata mediante la versione (2) del modello CIR a due fattori è effettuata in tale sottoperiodo (e riportata nella fig. 2). Il confronto non segnala scostamenti di fondo nella tendenza delle due misure di variabilità; tuttavia la forte reattività agli shock sul tasso della varianza condizionale della specificazione GARCH differenzia fortemente l'andamento temporale di breve andare delle due misure di variabilità del tasso a breve.

5. Esercizi di statica comparata

Gli esercizi di statica comparata sono stati condotti considerando quali valori base le stime dei parametri presentate nel paragrafo 4. A partire da esse, perturbiamo i valori dei parametri per valutare le sensibilità della differenza fra tassi a termine e attesi e la scomposizione dei rendimenti a pronti.

I prezzi dei titoli e i rendimenti a scadenza sono stati generati considerando una griglia di valori per il parametro λ . Nella tavola 5 il rendimento a 5 anni viene scomposto in rendimento atteso a un anno e premio. Come è possibile osservare, la differenza fra tassi *forward* e tassi attesi può essere notevole se si considerano gli estremi del campo di variazione di λ . Nel caso di premio massimo ($\lambda = -0,3$) vi è un contributo di quasi un punto al rendimento a 5 e 10 anni. Nel caso di premio negativo massimo ($\lambda = 0,3$), vi è un contributo, negativo per tre quarti di punto.

Lo stesso esercizio è stato effettuato considerando un valore di σ inferiore di circa il 50 per cento (0,10, tav. 6). In presenza di una variabilità più bassa, l'effetto di convessità risulta essere più contenuto per ogni valore del premio per il rischio di tasso, e gioca a favore delle scadenze più lunghe. Per valori di λ elevati, il premio si riduce di circa 5 centesimi. La riduzione della velocità di aggiustamento accresce in modo sensibile i premi per il

rischio che, per un valore di λ pari a $-0,1$, crescono di circa 20 centesimi (tav. 7). La diminuzione della tendenza centrale (tav. 8) ha una notevole influenza sul livello dei rendimenti, mentre i premi per il rischio non subiscono forti variazioni.

Nel considerare il modello a due fattori, è stato posto pari a zero il parametro di rischio λ . La deviazione dalla teoria delle aspettative non distorte tende a essere più contenuta e in generale meno sensibile alla variazione dei parametri (tavv. 9-11). Per questo modello, è stata considerata la scomposizione dei rendimenti ottenuta utilizzando i valori della stima indiretta, applicata per trattare la possibile distorsione delle stime (tav. 12). La dimensione della deviazione dalle aspettative non distorte non sembra essere tuttavia notevole per i diversi valori del parametro di rischio λ .

6. Conclusioni

L'analisi empirica effettuata in questo lavoro, mediante l'impiego di modelli fattoriali di determinazione dei tassi tratti dalla recente letteratura finanziaria, ha permesso di effettuare una scomposizione dei rendimenti sui titoli a diversa scadenza. Mediante la verifica econometrica di un'estensione a due fattori del modello classico di CIR - dove il secondo fattore corrisponde al livello tendenziale di lungo periodo del tasso a breve - si è proceduto alla quantificazione del premio per il rischio e della componente

di aspettativa, impliciti nei tassi sull'eurolira fino a 5 anni durante il periodo 1991-95.

Nel complesso, i risultati delle simulazioni, ottenuti sia con l'impiego del modello CIR a due fattori sia del modello CIR tradizionale (a un fattore), indicano che le componenti di premio risulterebbero relativamente contenute, e non spiccatamente variabili nel tempo, nel periodo campionario preso in considerazione. Sulla base dei parametri stimati, il premio per il rischio non supererebbe i 30 centesimi per le scadenze fino a 5 anni. Inoltre, anche durante le fasi di maggiore turbolenza, caratterizzate da ampie escursioni del livello dei tassi di interesse a breve e di quello tendenziale, le oscillazioni del premio sembrerebbero essere state relativamente contenute. Le fasi in cui si sarebbe osservata una tendenza all'ampliamento del premio hanno interessato il secondo semestre del 1993, il primo e il quarto trimestre del 1994 e il secondo trimestre del 1995. Solo in quest'ultima fase, tuttavia, l'aumento del premio ha coinciso con un incremento di variabilità del tasso a breve. Quest'ultima, stimata mediante il modello CIR a due fattori, appare mediamente in linea con quella valutabile mediante l'impiego di un modello di tasso a breve di tipo GARCH(1,1) - il riferimento più comune della letteratura finanziaria - in cui l'eteroschedasticità della variabilità è regolata da uno schema autoregressivo, comprendente gli shock sul livello corrente del tasso. Sebbene il confronto non segnali scostamenti nella tendenza di fondo tra le due misure di variabilità stimate, la forte reattività della varianza condizionale della specificazione GARCH(1,1) agli shock sul tasso ne differenzia fortemente l'andamento temporale di breve

andare rispetto all'analogia misura di variabilità, desunta dal modello CIR a due fattori. Infine, sulla base dell'evidenza econometrica elaborata, la più pronunciata eteroschedasticità nella variabilità stimata con il modello GARCH(1,1) non sembra migliorare chiaramente la qualità statistica della stima del processo stocastico della dinamica del tasso a breve.

STIME ECONOMETRICHE: MODELLI A UNO E DUE FATTORI
(periodo di stima: 3.1.1991-31.12.1995)

Variabile dipendente: tasso Libor a 1 mese Numero di osservazioni: 1.238				
MODELLO CIR (1985)				
Log-Likelihood:		6.216		
R ²		0.994		
DW		2.429		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
k	3.34	1.01	3.30	
θ	0.11	0.04	3.57	
σ_1	0.23	0.00	370.94	
RL	0.11	0.03	3.56	
MODELLO A 2 FATTORI: VERSIONE 1				
Log-Likelihood:		6,218		
R ²		0.996		
DW		2.427		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
		2.23	2.78	
θ_0	-0.01	0.11	-0.09	
θ_1	-7.06	7.21	-0.98	
σ_1	0.23	8.00E-04	302.78	
MODELLO A 2 FATTORI: VERSIONE 2				
Log-Likelihood:		6,054		
R ²		0.9875		
DW		2.426		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
k	4.06	0.68	2.78	
θ_0	-0.19	0.03	-6.24	
θ_1	-11.91	3.37	-3.54	
σ_2	0.29	2.44E-02	11.74	

(1) Gli errori standard sono calcolati mediante la correzione di White per l'eteroschedasticità dei residui.

STIME ECONOMETRICHE: MODELLI A UNO E DUE FATTORI

(Periodo di stima: 1.10.1992-31.12.1995)

Variabile dipendente: tasso Libor a 1 mese				
Numero di osservazioni: 839				
MODELLO CIR (1985)				
Log-Likelihood:		4,717		
R ²		0.9895		
DW		2.36		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
k	5.51	0.84	6.55	
θ	0.09	0.01	16.42	
σ_1	0.11	0.00	104.68	
RL	0.11	0.03	3.56	
MODELLO A 2 FATTORI: VERSIONE 1				
Log-Likelihood:		4,709		
R ²		0.975		
DW		2.23		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
		1.05	5.92	
θ_0	-0.07	0.03	2.16	
θ_1	-1.83	1.96	-0.93	
σ_1	0.11	1.30E-03	103.01	
MODELLO GARCH (1,1)				
Log-Likelihood:		4,149		
R ²		0.98090		
DW		2.0005		
param.	stima	errore standard (1)	t-statistico	
c_0	-2.00E-04	3.00E-03	-0.63	
c_1	9.97E-01	3.20E-03	311.63	
α_0	2.16E-07	2.90E-08	7.36	
α_1	0.21	2.74E-02	7.71	
β_1	0.72	2.94E-02	24.45	
σ_{nc}^2	0.00	1.90E-07	9.19	

(1) Gli errori standard sono calcolati mediante la correzione di White per l'eteroschedasticità dei residui.

STIMA ECONOMETRICA DEL TASSO A BREVE DI LUNGO PERIODO

(Periodo di stima: 3.1.1991-31.12.1995)

Variabile dipendente: (stimata) θ			
Numero di osservazioni: 1.238			
Log-Likelihood:		7,291	
R ²		0.99	
DW		2.007	
parametri	stima	errore standard (1)	t-statistico
m ₀	0.16	0.09	1.70
m ₁	1.54	0.04	1.77
s ₀	0.01	0.01	2.53
s ₁	0.09	0.01	13.74

(1) Gli errori standard sono calcolati mediante la correzione di White per l'eteroschedasticità dei residui.

STIMA DEI PARAMETRI MEDIANTE SIMULAZIONE

parametri	stima	errore standard(1)	t-statistico(1)
m ₀	0,052	0,792E-02	6,65
m ₁	0,523	0,075	6,44
s ₀	0,000	-	-
s ₁	0,097	0,362E-03	268,74
σ_1	0,232	0,849E-03	273,13
k	5.72	0,294	19,39

(1) Valore asintotico Bootstrap, ottenuto mediante simulazioni di Montecarlo ripetute per 200 campioni di 36.500 osservazioni

CIR (1985): CASO BASE

Valori di riferimento:

$$k = 3,34; \sigma = 0,23; \vartheta = 0,1092; R = 0,1$$

Tav. 5a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	11.84	0.84	11.90	0.88
-0.2	11.49	0.53	11.54	0.56
-0.1	11.16	0.24	11.19	0.25
0	10.84	-0.03	10.87	-0.03
0.1	10.55	-0.29	10.56	-0.29
0.2	10.26	-0.53	10.27	-0.54
0.3	10.00	-0.75	10.00	-0.78

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 5b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.85	0.92	0.92
-0.1	0.24	0.27	0.27
0	-0.03	-0.03	-0.03
0.1	-0.29	-0.30	-0.30
0.3	-0.77	-0.80	-0.80

CIR (1985): SHOCK ALLA VOLATILITA'

Valori di riferimento:

$$k = 3,34; \sigma = 0,1; \vartheta = 0,1093; R = 0,1$$

Tav. 6a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	11.86	0.86	11.93	0.91
-0.2	11.51	0.55	11.56	0.58
-0.1	11.18	0.26	11.21	0.28
0	10.86	-0.01	10.89	-0.01
0.1	10.56	-0.27	10.58	-0.28
0.2	10.28	-0.51	10.29	-0.53
0.3	10.01	-0.74	10.01	-0.76

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 6b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.87	0.94	0.95
-0.1	0.26	0.29	0.29
0	-0.01	-0.01	0.00
0.1	-0.27	-0.28	-0.28
0.3	-0.75	-0.78	-0.78

**CIR (1985): SHOCK ALLA VELOCITA' DI
AGGIUSTAMENTO DEL TASSO A BREVE TERMINE**

Valori di riferimento:

$$k = 2; \sigma = 0,23; \vartheta = 0,1092; R = 0,1$$

Tav. 7a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	12.50	1.53	12.66	1.65
-0.2	11.88	0.96	12.00	1.03
-0.1	11.32	0.44	11.40	0.48
0	10.82	-0.02	10.86	-0.02
0.1	10.35	-0.45	10.37	-0.47
0.2	9.93	-0.83	9.92	-0.09
0.3	9.53	-1.18	9.51	-1.24

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 7b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	1.34	1.69	1.77
-0.1	0.39	0.50	0.52
0	-0.03	-0.02	-0.01
0.1	-0.42	-0.48	-0.49
0.3	-1.13	-1.28	-1.31

**CIR (1985): SHOCK ALLA TENDENZA CENTRALE
DI VARIAZIONE DEI TASSI A BREVE**

Valori di riferimento:

$$k = 3,34; \sigma = 0,1; \vartheta = 0,07; R = 0,1$$

Tav. 8a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	8.43	1.08	8.33	1.11
-0.2	8.01	0.70	7.89	0.70
-0.1	7.64	0.35	7.50	0.34
0	7.29	0.03	7.14	0.01
0.1	6.98	-0.26	6.82	-0.28
0.2	6.69	-0.51	6.52	-0.55
0.3	6.42	-0.75	6.25	-0.80

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 8b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	1.11	1.15	1.14
-0.1	0.38	0.34	0.33
0	0.06	0.00	-0.01
0.1	-0.24	-0.31	-0.31
0.3	-0.77	-0.84	-0.84

MODELLO A 2 FATTORI: CASO BASE

Valori di riferimento:

$$k = 6,19; \sigma_1 = 0,23; \vartheta = 0,1042; R = 0,1$$

$$s_1 = 0,089; s_0 = 0,012; m_0 = 0,16; m_1 = 1,53$$

Tav. 9a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	10.93	0.45	10.95	0.48
-0.2	10.73	0.31	10.66	0.33
-0.1	10.53	0.18	10.57	0.20
0	10.35	0.05	10.39	0.06
0.1	10.17	-0.01	10.22	-0.06
0.2	10.00	-0.20	10.00	-0.19
0.3	9.82	-0.31	9.89	-0.03

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 9b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.46	0.44	0.49
-0.1	0.15	0.15	0.20
0	0.01	0.01	0.07
0.1	-0.12	-0.12	-0.06
0.3	-0.25	-0.25	-0.19

MODELLO A 2 FATTORI: SHOCK ALLA VOLATILITA'

Valori di riferimento:

$$k = 5,72; \sigma_1 = 0,23; \vartheta = 0,1042; R = 0,1$$

$$s_1 = 0,04; s_0 = 0,012; m_0 = 0,16; m_1 = 1,53$$

Tav. 10a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	10.92	0.44	10.93	0.46
-0.2	10.72	0.30	10.74	0.32
-0.1	10.52	0.17	10.56	0.18
0	10.34	0.04	10.38	0.05
0.1	10.16	-0.09	10.20	-0.08
0.2	9.98	-0.02	10.03	-0.02
0.3	9.81	-0.03	9.87	-0.03

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 10b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.46	0.42	0.46
-0.1	0.15	0.12	0.18
0	0.01	-0.01	0.04
0.1	-0.12	-0.14	-0.09
0.3	-0.25	-0.27	-0.21

**CIR (1985): SHOCK ALLA TENDENZA CENTRALE
DI VARIAZIONE DEI TASSI A BREVE**

Valori di riferimento:

$$k = 6,619; \sigma_1 = 0,23; \vartheta = 0,1042; R = 0,1$$

$$s_1 = 0,089; s_0 = 0,012; m_0 = 0,083; m_1 = 0,8$$

Tav. 11a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	10.95	0.49	10.99	0.53
-0.2	10.72	0.34	10.78	0.39
-0.1	10.51	0.21	10.58	0.25
0	10.30	0.08	10.39	0.11
0.1	10.10	-0.05	10.21	-0.01
0.2	9.91	-0.02	10.03	-0.01
0.3	9.72	-0.03	9.86	-0.03

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 11b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.45	0.46	0.55
-0.1	0.15	0.16	0.26
0	0.01	0.02	0.12
0.3	-0.24	-0.23	-0.14

STIMA INDIRETTA

Valori di riferimento:

$$k = 5,72; \sigma_1 = 0,23; \vartheta = 0,1042; R = 0,1$$

$$s_1 = 0,097; s_0 = 0,0; m_0 = 0,052; m_1 = 0,52$$

Tav. 12a

SCOMPOSIZIONE DEI TASSI

λ	Tasso a 5 anni		Tasso a 10 anni	
	I	II	I	II
-0.3	10.97	0.53	11.10	0.62
-0.2	10.72	0.38	10.83	0.47
-0.1	10.49	0.25	10.62	0.33
0	10.26	0.11	10.41	0.20
0.1	10.04	-0.01	10.21	0.07
0.2	9.83	-0.12	10.02	-0.06
0.3	9.62	-0.23	9.84	-0.17

(I) Rendimento a scadenza.

(II) Rendimento a scadenza - componente di aspettativa.

Tav. 12b

**DIFFERENZA TRA TASSI A TERMINE
E TASSI ATTESI A 1 MESE**

λ	1 anno	2 anni	5 anni
-0.3	0.43	0.52	0.68
-0.1	0.14	0.73	0.38
0	0.01	0.10	0.23
0.1	-0.11	-0.04	0.10
0.3	-0.34	-0.27	-0.15

Fig. 1

TASSI UFFICIALI, TASSI SULL'EUROLIRA E TASSO A 1 MESE ATTESO DI LUNGO PERIODO STIMATO (dati giornalieri; in percentuale)

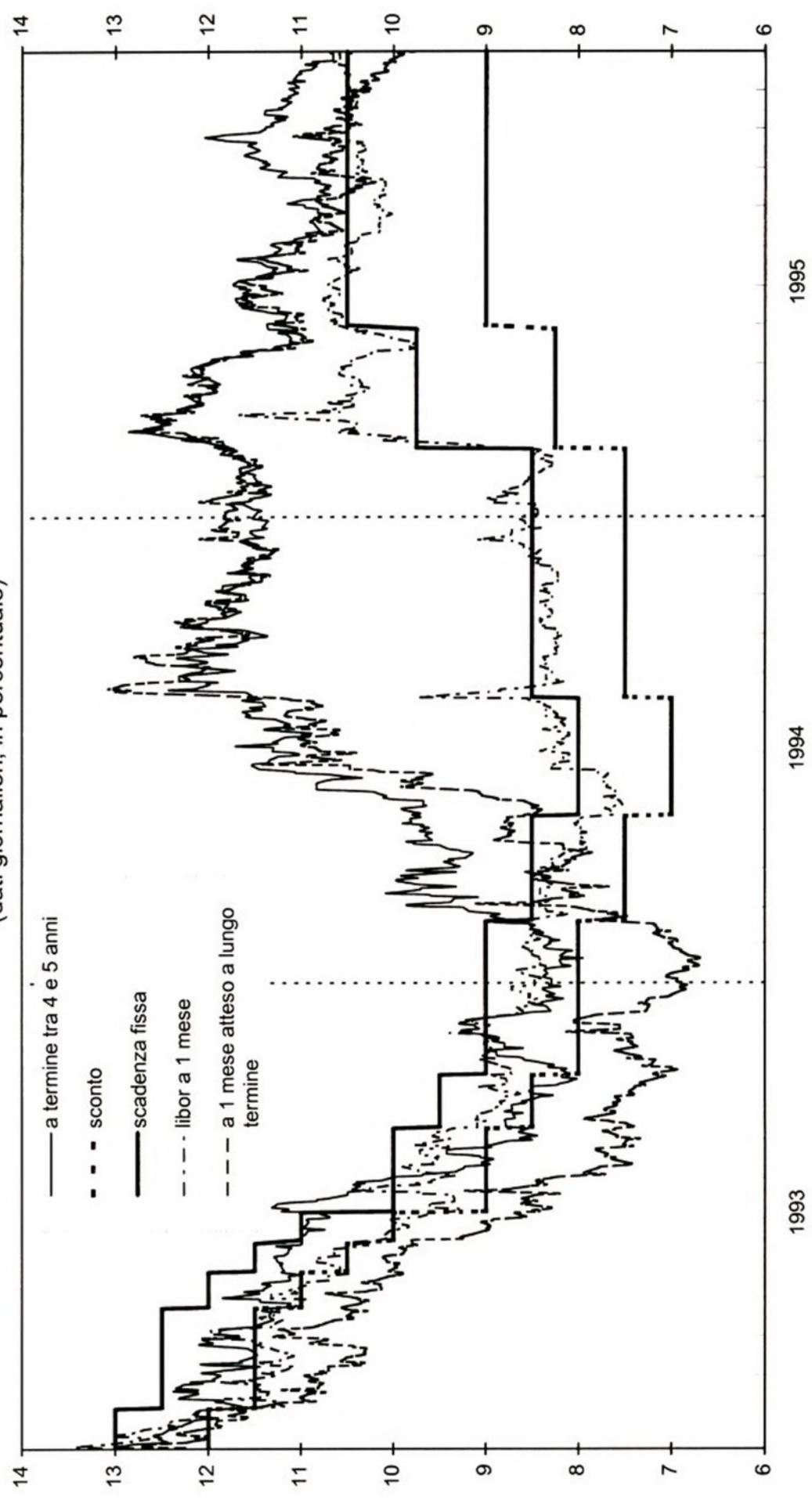


Fig. 2

VOLATILITA' CONDIZIONALE DEL TASSO A 1 MESE
(dati giornalieri; in percentuale)

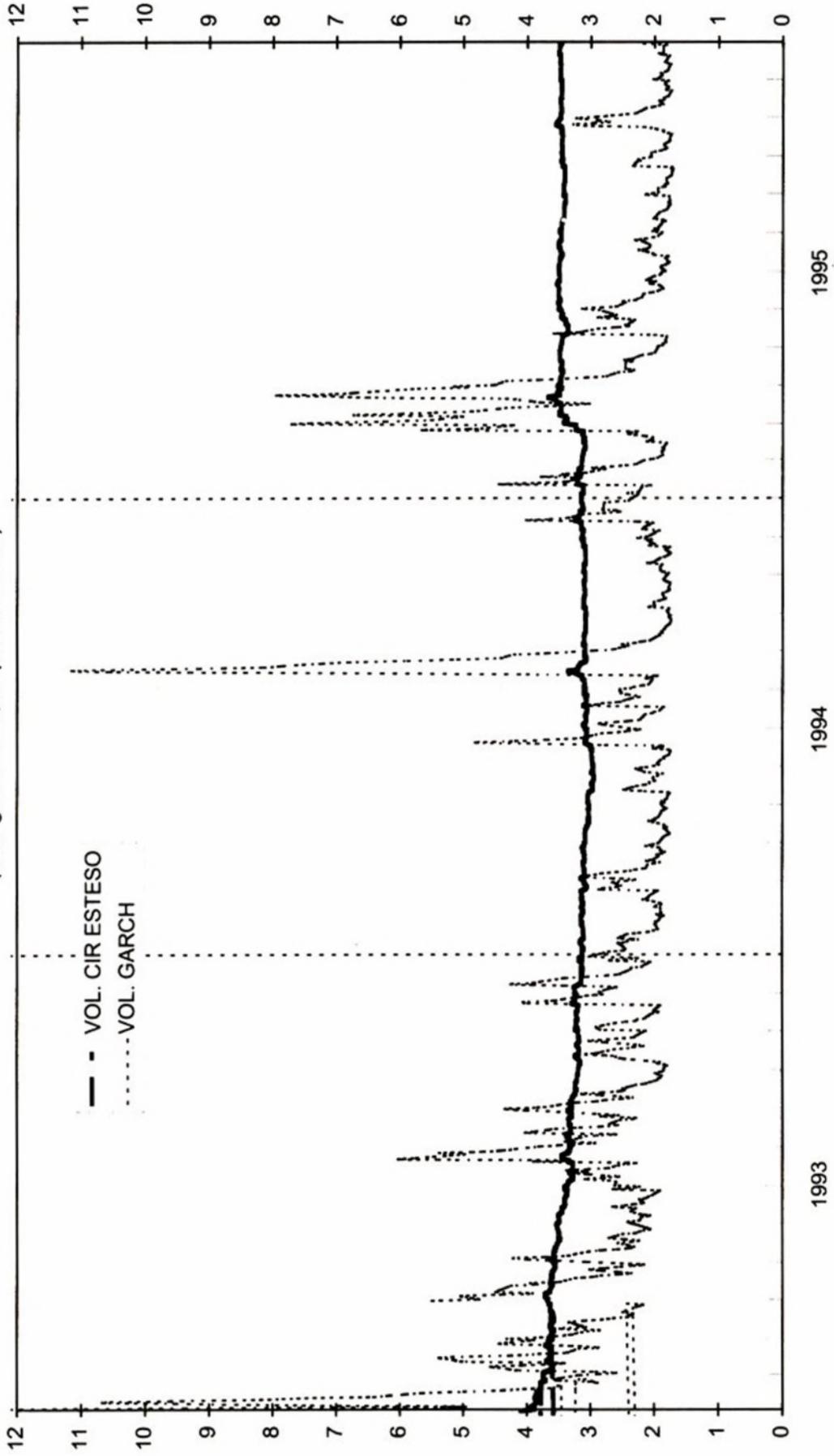


Fig. 3

TASSO FORWARD A 1 MESE FRA 1 ANNO E TASSO A 1 MESE ATTESO FRA 1 ANNO

(dati settimanali; in percentuale)

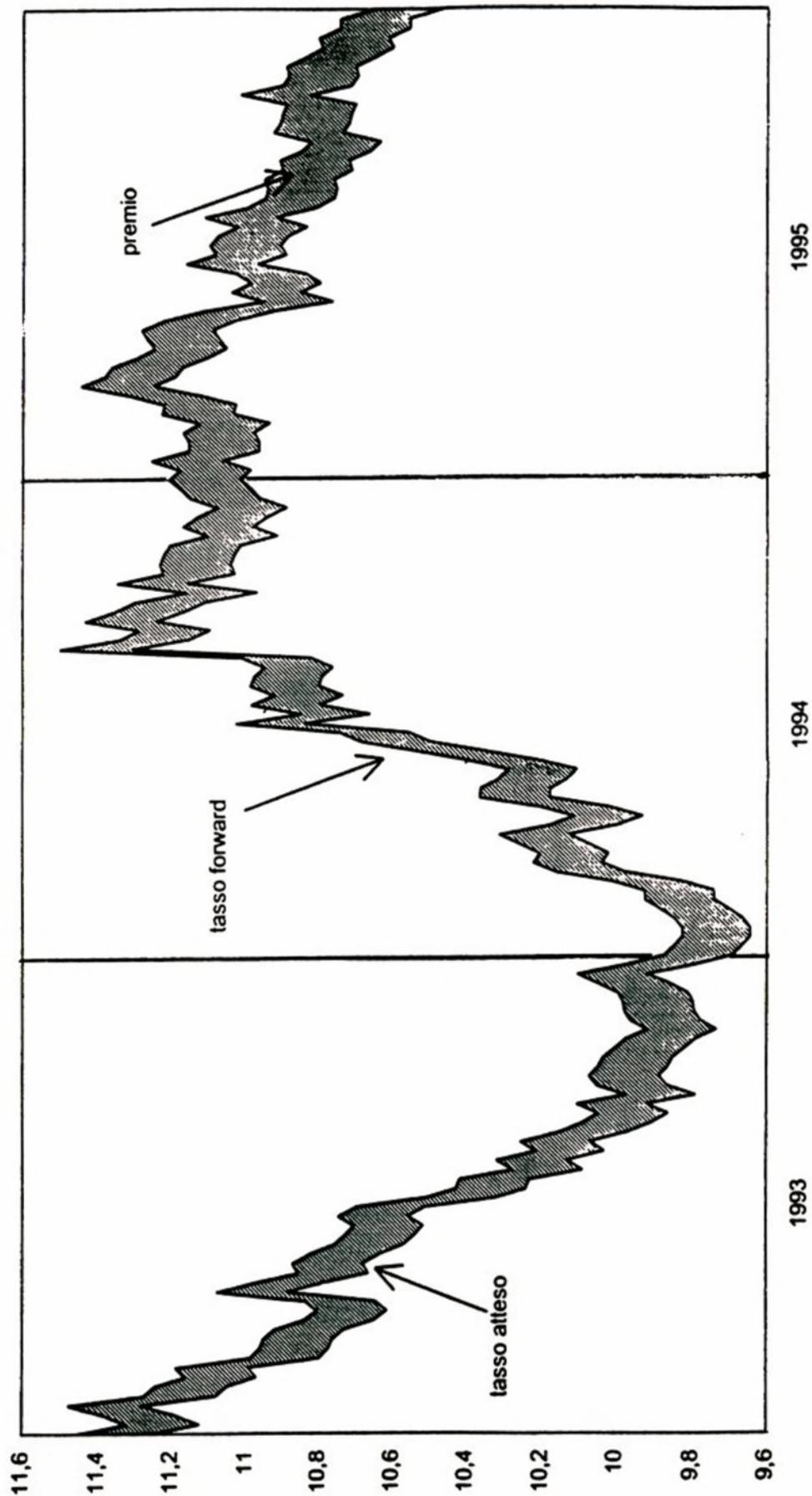
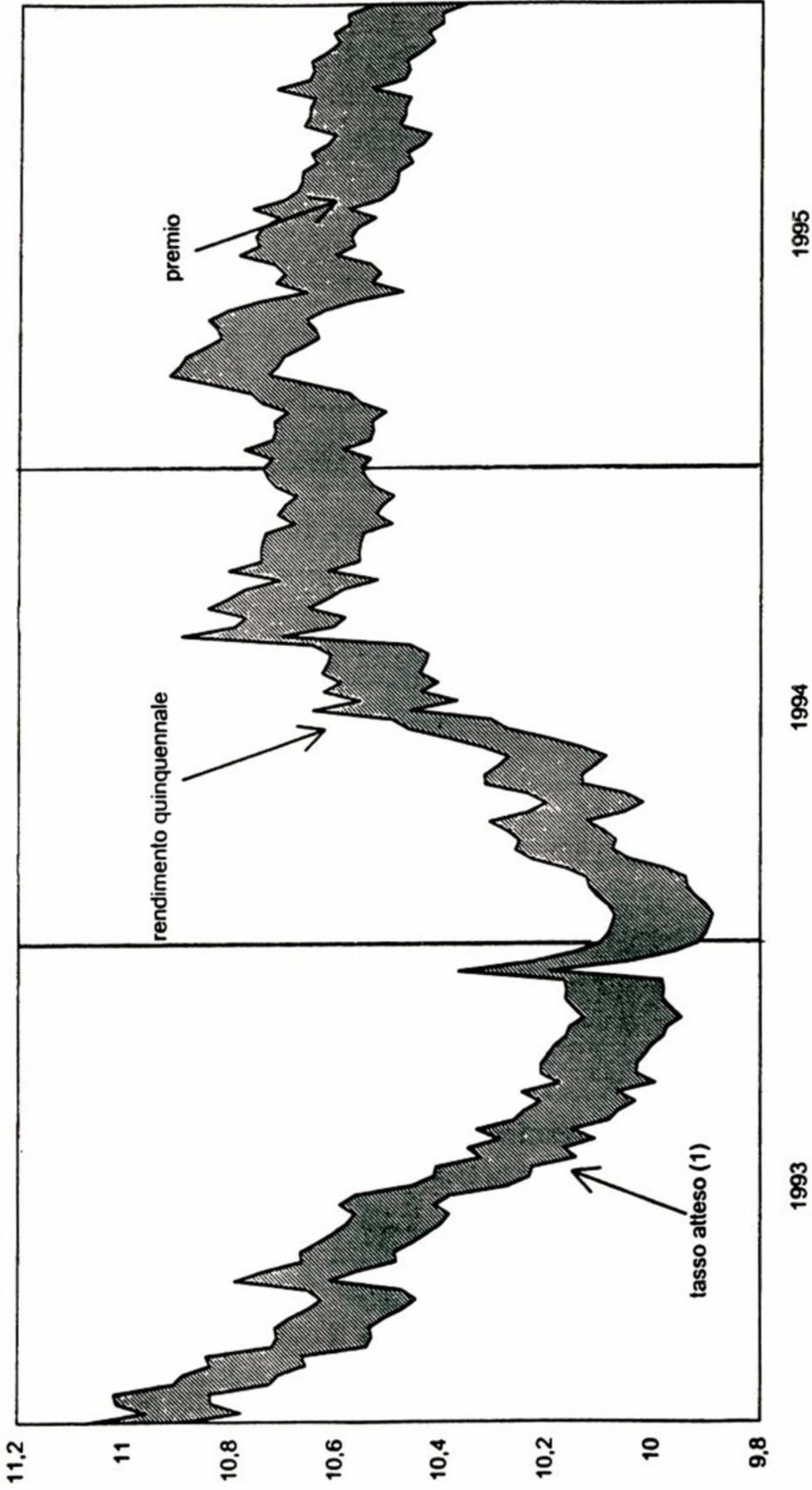


Fig. 4

**RENDIMENTO A SCADENZA DI TITOLI QUINQUENNALI E PREMIO DI ROLLOVER RISPETTO
AL TASSO A 1 MESE SULL'ORIZZONTE TEMPORALE QUINQUENNALE**
(dati settimanali; in percentuale)



(1) Rendimento medio atteso sull'orizzonte quinquennale dell'investimento nel tasso a 1 mese.

Riferimenti bibliografici

- Balduzzi, D. K., S. R. Das e S. Foresi (1995), *The Central Tendency: A Second Factor in Bond Yield*, New York University, dattiloscritto.
- Ball, C. A. e W. N. Torous (1996), *Unit-Roots and the Estimation of Interest Rate Dynamics*, in "Journal of Empirical Finance", vol. 3, pp. 215-38.
- Barone, E., D. Cuoco ed E. Zautzik (1989), *La struttura dei rendimenti per scadenza secondo il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica*, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 128.
- Bianchi, C., R. Cesari e L. Panattoni (1994), *Alternative Estimators of the Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure of Interest Rates: A Monte Carlo Comparison*, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 236.
- Campbell, J. Y. e R. J. Shiller (1987), *Cointegration and Test of Present Value Models*, in "Journal of Political Economy", vol. 95, pp. 1063-88.
- _____ (1991), *Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View*, in "Review of Economic Studies", vol. 58, pp. 495-514.
- Carverhill A. e C. Strickland (1992), *Money Market Term Structure Dynamics and Volatility Expectations*, University of Warwick, dattiloscritto.
- Cesari, R. (1992), *Inflazione attesa, tassi reali e la struttura per scadenza dei tassi di interesse*, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 173.
- Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff e A. B. Sanders (1992), *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, in "Journal of Finance", vol. 47, pp. 1209-27.
- Cox J., J. Ingersoll e S. A. Ross (1981), *A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of*

Interest Rates, in "Journal of Finance", vol. 36, pp. 769-99.

_____ (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, in "Econometrica", vol. 53, pp. 385-407.

Duffie, D. e R. Kan (1993), *A Yield-Factor Model of Interest Rates*, Stanford University, Graduate School of Business, dattiloscritto.

_____ e K. Singleton (1995), *An Econometric Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Yields*, Stanford University, Graduate School of Business, dattiloscritto.

Epstein, L. G. e S. E. Zin (1989), *Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework*, in "Econometrica", vol. 57, pp. 937-69.

Fama, E. F. e R. R. Bliss (1987), *The Information in Long-Maturity Forward Rates*, in "American Economic Review", vol. 77, pp. 680-92.

Fisher, M. e C. Gilles (1996), *Estimating Exponential-Affine Model of the Term Structure*, Federal Reserve System, Board of Governors, dattiloscritto.

Fornari, F. e A. Mele (1994), *Conditional Volatility in the Term Structure: Theoretical and Empirical Aspects*, LUISS, Quaderni di Ricerca, n. 40.

Gonzalo, J. e C. W. J. Granger (1995), *Estimation of Common Long-Memory Components in Cointegrated Systems*, in "Journal of Business and Economic Statistics", vol. 13, pp. 23-35.

Hall, A. D., H. M. Anderson e C. W. J. Granger (1992), *Cointegration Analysis of Treasury Bill Yields*, in "Review of Economics and Statistics", vol. 74, pp. 116-26.

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton NJ.

- Litterman R. e J. Scheinkman (1991), *Common Factors Affecting Bond Returns*, in "Journal of Fixed Income", vol. 1, pp. 54-61.
- Lucas, R. E. (1978), *Asset Prices in an Exchange Economy*, in "Econometrica", vol. 46, pp. 1429-45.
- Press, W., B. Flannery, S. Teukolsky e W. Vetterling (1988), *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Sheikh, A. (1993), *The Behavior of Volatility Expectations and Their Effect on Expected Returns*, in "Journal of Business", vol. 66, pp. 93-116.
- Shiller, R. J. (1990), *The Term Structure of Interest Rates*, in B. M. Friedman e F. H. Hahn (a cura di), *Handbook of Monetary Economics: Volume I*, Amsterdam, North-Holland.
- Steeley, J. (1995), *A Two-Factor Model of the UK Yield Curve*, Bank of England, dattiloscritto.

ELENCO DEI PIÙ RECENTI "TEMI DI DISCUSSIONE" (*)

- n. 287 — *Il comportamento strategico degli specialisti in titoli di Stato*, di M. ORDINE e A. SCALIA (novembre 1996).
- n. 288 — *Intermediazione finanziaria, condivisione dell'informazione e incentivi al monitoring*, di P. E. MISTRULLI (novembre 1996).
- n. 289 — *Investment and Demand Uncertainty*, di L. GUISO e G. PARIGI (novembre 1996).
- n. 290 — *Where Do Migrants Go? Risk-Aversion, Mobility Costs and the Locational Choice of Migrants*, di F. DAVERI e R. FAINI (dicembre 1996).
- n. 291 — *Gli effetti del bilancio pubblico sull'attività economica nel breve periodo: una valutazione con il modello econometrico trimestrale della Banca d'Italia*, di S. MOMIGLIANO e S. SIVIERO (dicembre 1996).
- n. 292 — *Wage Indexation Bargaining and Inflation*, di F. DRUDI e R. GIORDANO (dicembre 1996).
- n. 293 — *Le determinanti del tasso di interesse sui crediti alle imprese*, di C. D'AURIA e A. FOGLIA (gennaio 1997).
- n. 294 — *La povertà tra i minorenni in Italia: dimensioni, caratteristiche, politiche*, di L. CANNARI e D. FRANCO (febbraio 1997).
- n. 295 — *Misurazione e previsione degli investimenti con il "metodo della disponibilità": analisi ed evidenze*, di F. NUCCI (febbraio 1997).
- n. 296 — *Gli effetti della liberalizzazione valutaria sulle transazioni finanziarie dell'Italia con l'estero*, di A. F. POZZOLO (febbraio 1997).
- n. 297 — *The Italian Recession of 1993: Aggregate Implications of Microeconomic Evidence*, di R. MINIACI e G. WEBER (febbraio 1997).
- n. 298 — *More Equal but Less Mobile? Education Financing and Intergenerational Mobility in Italy and in the US*, di A. RUSTICHINI, A. ICHINO e D. CHECCHI (febbraio 1997).
- n. 299 — *Excessive Activism or Passivism of Monetary Policy?*, di W. LETTERIE e F. LIPPI (marzo 1997).
- n. 300 — *Variabilità dei tassi d'interesse e contenuto informativo delle opzioni*, di F. FORNARI e C. MONTICELLI (marzo 1997).
- n. 301 — *Comportamento strategico sul mercato primario e secondario dei titoli di Stato: il ruolo dell'informazione asimmetrica*, di F. DRUDI e M. MASSA (marzo 1997).
- n. 302 — *Tecniche BVAR per la costruzione di modelli previsivi mensili e trimestrali*, di G. AMISANO, M. SERATI e C. GIANNINI (aprile 1997).
- n. 303 — *Bidder Profitability under Uniform Price Auctions and Systematic Reopenings: The Case of Italian Treasury Bonds*, di A. SCALIA (aprile 1997).
- n. 304 — *Determinazione decentrata di salario e condizioni lavorative: un confronto tra modelli di contrattazione e di salari di efficienza*, di R. TORRINI (aprile 1997).
- n. 305 — *The Role of the Different Central Bank Rates in the Transmission of Monetary Policy*, di L. BUTTIGLIONE, P. DEL GIOVANE ed E. GAIOTTI (aprile 1997).
- n. 306 — *Monetary Policy Actions and the Term Structure of Interest Rates: A Cross-Country Analysis*, di L. BUTTIGLIONE, P. DEL GIOVANE e O. TRISTANI (aprile 1997).
- n. 307 — *The Penalties of Unemployment*, di A. SEN (giugno 1997).
- n. 308 — *Mobilità territoriale e costo delle abitazioni: un'analisi empirica per l'Italia*, di L. CANNARI, F. NUCCI e P. SESTITO (giugno 1997).
- n. 309 — *The Effects of Technology Shocks on Output Fluctuations: An Impulse Response Analysis for the G7 Countries*, di S. FABIANI (giugno 1997).
- n. 310 — *Inflation and Monetary Policy in Italy: Some Recent Evidence*, di E. GAIOTTI, A. GAVOSTO e G. GRANDE (luglio 1997).

(*) I "Temi" possono essere richiesti a:

Banca d'Italia – Servizio Studi – Divisione Biblioteca e pubblicazioni – Via Nazionale, 91 – 00184 Roma
(fax 06 47922059).

*Finito di stampare
nel mese di luglio 1997
presso il Centro Stampa
della Banca d'Italia in Roma*