BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

Inflazione attesa, tassi reali e la struttura per scadenza dei tassi d'interesse

di Riccardo Cesari

Numero 173 - Luglio 1992

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

Inflazione attesa, tassi reali e la struttura per scadenza dei tassi d'interesse

di Riccardo Cesari

Numero 173 - Luglio 1992

La serie «Temi di discussione» intende promuovere la circolazione, in versione provvisoria, di lavori prodotti all'interno della Banca d'Italia o presentati da economisti esterni nel corso di seminari presso l'Istituto, al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

I lavori pubblicati nella serie riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità dell'Istituto.

INFLAZIONE ATTESA, TASSI REALI E LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE.

Riccardo Cesari (*)

SOMMARIO

Il lavoro analizza la relazione tra tassi nominali, tassi reali e tassi d'inflazione. All'interno di un modello multivariato di equilibrio generale alla Cox, Ingersoll e Ross la nota equazione di Fisher che scompone il tasso d'interesse nominale nel tasso reale e nel tasso atteso d'inflazione viene generalizzata all'intera struttura per scadenza dei tassi d'interesse. Quest'ultima si dimostra essere la somma di una struttura per scadenza dei tassi reali, relativi a titoli senza rischio d'insolvenza rappresentativi di beni reali, più una struttura per scadenza dei tassi d'inflazione a termine, vale a dire dei tassi di crescita impliciti nei prezzi a termine dei beni reali. Le determinanti dei term premia sono analizzate e il modello è applicato al caso dei titoli di Stato nel periodo 1983-1991, caratterizzato da tassi reali positivi.

INDICE

---

* Banca d'Italia, Sede di Bologna

1. Introduzione [1]

Lo studio dei nessi tra inflazione e tassi d'interesse ha un posto di rilievo nell'analisi economica. Se l'importanza dell'argomento (nonchè la sua fortuna) è legata al periodico ripresentarsi di tensioni inflazionistiche nella vita economica delle nazioni, la sua storia ha origini illustri, collegandosi alle prime analisi di economia monetaria ed in particolare al pensiero di Henry Thornton (1802, 1811) cui si deve una formulazione in termini assai moderni del duplice legame tra tassi d'interesse e tassi d'inflazione (cfr. Hicks (1967) cap.10).

In particolare, secondo Thornton, e più tardi, secondo l'analisi teorica ed empirica svolta da Irving Fisher (1896,1930), in periodi di crescita dei prezzi il tasso d'interesse monetario contiene una componente che va a compensare il prestatore di fondi "per un atteso aumento della svalutazione della moneta" (Thornton (1811)) [2].

In termini elementari, nel caso di un bene capitale reale ("grano") di valore V=QP (quantità Q per prezzo unitario P) il tasso di crescita uniperiodale sarà sempre scomponibile, ex post, come

$V(1+i)=Q(1+r)P(1+\pi)$ ove i, r, π rappresentano rispettivamente i tassi di crescita del valore nominale V, della quantità Q e del prezzo unitario P. Nel caso di capitalizzazione continua si ottiene la relazione a posteriori

$$i = r + \pi$$

per cui il tasso nominale è pari al tasso reale più il tasso d'inflazione osservato nel periodo.

Nel caso di un capitale monetario, in condizioni di certezza (ovvero di perfetta previsione), la relazione vale anche ex ante per la necessità di compensare pienamente il prestatore della perdita di potere d'acquisto cui va incontro l'ammontare nominale dato a prestito. Infatti, se ogni investitore trae beneficio dalla moneta solo per la quantità di beni e servizi che essa consente di acquistare, ne deriva che egli agirà con l'obiettivo di accrescere la sua ricchezza in termini reali, senza subire forme di illusione monetaria.

In condizioni di incertezza sugli andamenti futuri delle variabili economiche ed in particolare del tasso d'inflazione, la teoria di Fisher sottolinea il ruolo cruciale delle aspettative, proponendo l'equazione precedente, espressa in termini di valori attesi, come una condizione di equilibrio (equilibrio inflazionistico) per cui il tasso nominale i eguaglierà il tasso reale atteso r^e più il tasso atteso d'inflazione π^e:

$i=r^e+\pi^e$ (equazione di Fisher).

L'ipotesi di Fisher, in altre parole, è che una variazione unitaria dell'inflazione attesa indurrà un'uguale variazione nel tasso nominale, lasciando invariato il tasso reale (effetto Fisher) ([3]) ([4]).

L'equazione di Fisher è stata oggetto di numerose analisi, soprattutto a livello empirico ([5]): negli ultimi due decenni, in particolare, l'inflazione mondiale -dal punto di vista empirico- e l'ipotesi delle aspettative razionali

-dal punto di vista teorico- hanno rappresentato nuovi stimoli per approfondimenti su un nesso cruciale per le interrelazioni tra decisioni reali e decisioni finanziarie. Le numerose analisi disponibili, tuttavia, sono state largamente sviluppate ([6]) con riferimento a "il" tasso d'interesse e a "il" tasso d'inflazione, mancando spesso di rilevare che esiste un'intera struttura per scadenza dei rendimenti e quindi un'analoga struttura per scadenza dei tassi attesi d'inflazione ([7]).
Infatti, come si vedrà, l'equazione di Fisher può essere ricavata, in forma generalizzata, all'interno di un modello stocastico multivariato in cui sia presente i) un'economia produttiva che concorra a determinare, assieme all'avversione al rischio degli operatori, i tassi attesi di rendimento reale; ii) un mercato finanziario sufficientemente ampio, con titoli denominati in moneta e aventi una gamma virtualmente completa di scadenze (term structure); iii) un processo inflazionistico di natura stocastica che influenzi le scelte degli operatori, volte a massimizzare l'utilità derivante dal consumo 'reale' di beni e servizi, senza forme di illusione monetaria.

Una tale generalizzazione, oltre a rappresentare un importante risultato teorico, ha effetti diretti anche sul piano pratico degli strumenti di supporto alle decisioni (dei policy makers come dei singoli operatori): infatti la scomposizione dei rendimenti nominali cui si perviene consente di estrarre, dai dati osservabili, i segnali di mercato sulle aspettative d'inflazione e sul loro profilo temporale, nascosti "in the entrails" (Fama (1977)).

In aggiunta, nella misura in cui tali aspettative sono determinanti nello spiegare il livello e la volatilità dei tassi d'interesse e i connessi comportamenti economici degli operatori, si può utilizzare il corrispondente modello multivariato di determinazione dei tassi d'interesse per valutare titoli contingenti e ottenere indicazioni utili per l'immunizzazione dei portafogli finanziari in condizioni di incertezza sul potere d'acquisto delle attività monetarie ([8]).

Il lavoro prosegue con una breve descrizione degli andamenti dei tassi d'interesse, dei tassi d'inflazione e delle loro volatilità in Italia nell'ultimo ventennio (paragrafo 2). Il modello multivariato della struttura per scadenza è presentato nel paragrafo 3 mentre nel paragrafo 4 si analizzano le determinanti dei premi per la scadenza presenti nei tassi di rendimento reali e nominali. Nel paragrafo 5 il modello è stimato sul periodo '83-'91 mediante il metodo di massima verosimiglianza a tempo continuo e il paragrafo 6 contiene alcune considerazioni conclusive.

2. Tassi, inflazione e volatilità: alcune evidenze empiriche.

La Fig. 1 mostra gli andamenti del tasso d'inflazione calcolato sull'indice generale dei prezzi al consumo (mese su mese corrispondente dell'anno precedente) e dei tassi netti di rendimento sui BOT a 3 mesi all'emissione e sui BTP quotati ([9]). Nel complesso, il nesso tra le variabili sembra assai forte, soprattutto dopo i primi anni '70 e la riforma delle emissioni dei BOT (1975). In particolare, si può notare che fino al 1982 i movimenti dei tassi d'interesse sembrano anticipare quelli del tasso d'inflazione mentre in seguito sembra essere quest'ultimo a precedere i movimenti dei tassi d'interesse e a trovarvi pieno accomodamento.

Per il periodo '69-'91 e nei due sottoperiodi '69-'82 e '83-'91 si ottengono le correlazioni seguenti:

CORRELAZIONI TRA TASSI D'INTERESSE E TASSI D'INFLAZIONE

	1969-1982	**1983-1991**	**1969-1991**
BOT 3m	83.4%	95.4%	76.1%
BTP	73.2%	98.0%	61.6%

Correlazioni analoghe furono trovate da Gibson e Coates (prezzi all'ingrosso e rendimento dei consols) e da Peake (per vari tassi di mercato monetario e finanziario) su lunghe serie storiche di dati. Ad esempio, gli indici riportati da Keynes (1930 cap.30) su oltre 130 anni (1791-1928) danno una correlazione del 96.1% ([10]), assai vicina al grado di correlazione osservabile in Italia nell'ultimo decennio.

La diversità dei due periodi (prima e dopo il 1982) e quindi dei regimi monetari in essi prevalenti emerge anche dall'analisi della volatilità dei tassi d'interesse e d'inflazione, riportata nella Fig. 2.

Al periodo di elevata volatilità manifestata dai tassi d'interesse e d'inflazione negli anni '70 succede un periodo caratterizzato da variabilità più contenuta e più strettamente correlata:

CORRELAZIONI TRA VOLATILITA'

	1970-1982	**1983-1991**	**1970-1991**
BOT 3m	60.7%	74.8%	64.6%
BTP	51.7%	83.8%	57.9%

La politica del cambio nello SME ha avuto un ruolo decisivo nel determinare l'accresciuta correlazione dell'ultimo periodo. In particolare, dal 1987 (anno dell'ultimo riallineamento delle parità centrali, se si esclude quello di gennaio '90 connesso all'adesione alla banda stretta) l'uso della fascia larga di fluttuazione si è fatto via via più sporadico e il controllo del cambio più rigoroso (Banca d'Italia (1990) p. 12). Tra il 1987 e il 1991 la correlazione tra variazioni dei tassi d'interesse e variazioni dei tassi d'inflazione si è collocata tra l'80% e l'85%.

Il grafico realizzato sulla base dei dati medi annui (per eliminare le variabilità transitorie) accentua le diversità dei due periodi considerati presentandoli efficacemente l'uno come un periodo di disordine monetario, l'altro come un periodo di maggiore stabilità e forte controllo della moneta, con tassi d'interesse in stretta sintonia con gli andamenti dell'inflazione (Fig. 3).

3. Le strutture per scadenza nominali e reali

Il modello di riferimento qui adottato è quello, ormai classico, di equilibrio economico generale sviluppato da Cox, Ingersoll e Ross (CIR) (1985 a).

Come sottolineano gli stessi autori (ivi par.5) il principale vantaggio di tale approccio generale, rispetto ad approcci 'parziali' basati solo sulla condizione di non arbitraggio, consiste nel fatto che le variabili endogene sono ricondotte coerentemente (dal punto di vista della loro specificazione e della loro dinamica) alle determinanti esogene del sistema. In particolare i premi al rischio presenti nei rendimenti delle attività finanziarie vengono ricavati dalle condizioni d'equilibrio senza la possibilità che una loro specificazione esogena, creando opportunità di arbitraggio, possa risultare incompatibile con l'equilibrio.

Il modello di equilibrio generale di CIR (1985a) è stato specializzato da CIR (1985b) al caso di tre variabili di stato ([11]): il tasso istantaneo reale, r, (su prestiti istantanei, privi di rischio, dell'unico bene di consumo/investimento ([12])), il tasso atteso d'inflazione, y, e il livello generale dei prezzi, p.

L'introduzione di queste due ultime grandezze come variabili di stato del sistema, sebbene non soddisfacente dal punto di vista della teoria monetaria ([13]), rappresenta il modo più semplice di inserire nell'analisi una distinzione tra grandezze reali e grandezze nominali, distinzione peraltro indispensabile, almeno in linea di principio, se si tiene presente che il modello univariato di CIR (1985 b) descrive l'equilibrio di un'economia reale, in cui i tassi sono tassi reali d'interesse, determinati dalle preferenze e dalla tecnologia, mentre i tassi osservabili nella realtà sono in genere grandezze nominali ([14]).

Le dinamiche delle variabili sono descritte da equazioni differenziali stocastiche (SDE) e sono così specificate:

per il tasso istantaneo reale

$$dr(t) = \kappa(\theta - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz_1 \qquad (3.1)$$

per il tasso atteso d'inflazione

$$dy(t) = \kappa_2(\theta_2 - y)\,dt + \sigma_2\sqrt{y}\,dz_2 \qquad (3.2)$$

e per il prezzo dell'unica merce (o paniere)

$$dp(t) = yp\,dt + \sigma_p p\sqrt{y}\,dz_3 \qquad (3.3)$$

Le SDE (3.1) e (3.2) si dicono anche equazioni 'square root' o di Feller (1951). Se il drift è a parametri positivi, k e k_2 rappresentano le velocità di aggiustamento dei rispettivi processi ai valori di lungo periodo θ, θ_2 (mean reversion) ([15]). Inoltre, il processo di Feller è non negativo, ha distribuzione di transizione χ^2 non centrale e distribuzione di steady-state di tipo gamma, con media θ e varianza $\sigma^2\theta/(2k)$ ([16]).

Le variabili $z_j(t)$, $j=1,2,3$ rappresentano processi di Wiener (moti browniani) standard, caratterizzati da:

$z_j(t) \sim N(0,t)$

$E(z_j(t)z_j(s)) = \min(t,s)$

$z_j(0) = 0$ quasi sicuramente.

Da (3.3) abbiamo

$$E_t\left(\frac{dp}{p}\right) = ydt \tag{3.4a}$$

e

$$Var_t\left(\frac{dp}{p}\right) = \left(\frac{dp}{p}\right)^2 = \sigma_p^2 ydt \tag{3.4b}$$

Come noto, l'ipotesi di aspettative razionali di Hurwicz (1946)-Muth (1961) implica che l'inflazione anticipata sia uguale al valor medio (condizionato) dell'inflazione realizzata e che la variabilità attesa dell'inflazione sia uguale alla varianza dell'inflazione realizzata, lineare in y.

Confrontando (3.2) e (3.3) notiamo che $\sigma_p\sqrt{y}dz_3$ è l'inflazione non anticipata mentre $\sigma_2\sqrt{y}dz_2$ rappresenta le variazioni inattese nell'inflazione attesa.

In generale ci sarà un certo grado di covarianza tra inflazione attesa e inflazione effettiva ([17]):

$$Cov_t\left(\frac{dp}{p}, dy\right) = \rho\sigma_2\,\sigma_p\,ydt$$

dove $\rho dt \equiv Cov_t(dz_2, dz_3)$ (3.4c)

Si noti che la proprietà di Markov per l'inflazione attesa implica che il livello corrente è informazione sufficiente per l'attesa futura. Ipotesi di aspettative che tengano conto delle attese passate si possono introdurre ma a prezzo di significative complicazioni.

Supponendo l'assenza di correlazione tra shocks reali (dz_1) e nominali (dz_2, dz_3) si ottiene, dall'equazione fondamentale di valutazione di CIR (1985 b p. 404) l'equazione alle derivate parziali (PDE) la cui soluzione è il prezzo monetario di un titolo con flusso cedolare nominale continuo C(r,y,p,t) e valore nominale a scadenza $\Omega(r(T),y(T),p(T))$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sigma^2 rM_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 yM_{yy} + \rho\sigma_2\sigma_p ypM_{yp} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 yp^2 M_{pp} \\ + [\kappa(\theta-r) - \lambda r]M_r + [\kappa_2(\theta_2-y) - \rho\sigma_2\sigma_p y]M_y \\ + [y-\sigma_p^2 y]\,pM_p + M_t - iM + C = 0 \\ M(r,y,p,T,T) = \Omega(r(T),y(T),p(T))\end{gathered} \tag{3.5}$$

ove $\lambda r\, dt = \mathrm{Cov}_t(dW/W, dr)$ è pari alla covarianza tra variazioni del tasso reale e tasso di crescita della ricchezza reale W e rappresenta un premio (se negativo) o uno sconto per il rischio derivante dal possedere un titolo il cui prezzo rispettivamente covaria o controvaria rispetto alla ricchezza reale (CIR (1985 b) p. 393).

Nell'equazione (3.5) i indica il tasso istantaneo nominale ([18]) e risulta dalla somma di tre componenti r, y e $-\sigma_p^2 y$

$$i = r + (1-\sigma^2_p)y \quad \text{con } 0< \sigma^2_p <1 \text{ per ipotesi} \tag{3.6}$$

Come ha sottolineato Fischer (1975) p. 513, la differenza tra il tasso nominale e la somma dei tassi reale e d'inflazione attesi deriva dalla natura aleatoria dell'inflazione, essendo una conseguenza della diseguaglianza di Jensen per cui $E(1/p) > 1/E(p)$.
Infatti, definendo il potere di acquisto della moneta come $q = 1/p$ abbiamo

$$\frac{dq(t)}{q(t)} = \alpha_q dt+\sigma_q dz_3 = -y(1-\sigma_p^2)\, dt - \sigma p \sqrt{y}\, dz_3$$

da cui

$$i = r + E_t\left(-\frac{dq}{qdt}\right)$$

cioè il tasso nominale è la somma del tasso reale atteso e del tasso atteso di riduzione del potere d'acquisto della moneta-unità di conto. In tal modo il termine di varianza non è più esplicito ([19]).

La scomposizione (3.6) suggerisce una semplice spiegazione della assai documentata correlazione negativa tra tasso reale e tasso d'inflazione (c.d. effetto Mundell). Infatti <u>definendo</u> il tasso reale come $r^* \equiv i-y$ si ottiene $Cov(r^*,y)=-\sigma_p^2\ Var(y)$ cioè una covarianza negativa sebbene nel modello tassi reali e tassi d'inflazione siano indipendenti per ipotesi. In tal modo, la natura stocastica dell'inflazione ed errori di misurazione del tasso reale potrebbero spiegare (via diseguaglianza di Jensen) l'osservata controvariazione ([20]).

La soluzione dell'equazione (3.5) ha la rappresentazione stocastica

$$M(r,y,p,t,T) = \hat{E}_t\left[\Omega(T)\exp\left(-\int_t^T i(v)\,dv\right)\right] + \hat{E}_t\left[\int_t^T C(v)\exp\left(-\int_t^v i(s)\,ds\right)dv\right]$$

ove Ê è il valor medio indotto dalle variabili di stato aggiustate per il rischio (CIR (1985a) Lemma 4).

Usando le proprietà del valor medio si può dimostrare che se il valore terminale è indipendente da p, il prezzo nominale è anch'esso indipendente da p, (r,y) essendo un processo di diffusione (quindi markoviano) bidimensionale.

Analogamente, il prezzo reale dello stesso titolo contingente con flusso di cedola reale D(=C/p) e valore terminale reale, alla data di scadenza T, Θ(T)(=Ω/p) è la soluzione del problema di PDE

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r\,N_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\,y\,N_{yy} + \rho\sigma_2\sigma_p ypN_{yp} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 yp^2\,N_{pp} + [\kappa(\theta-r)-\lambda r]N_r + \kappa_2(\theta_2-y)N_y + ypN_p + N_t - rN + D = 0 \qquad (3.7)$$

$$N(r,y,p,T,T) = \Theta(T)$$

Queste equazioni di valutazione si possono specificare in vari modi, in funzione delle caratteristiche contrattuali dei titoli da valutare.

Il caso particolare che qui in primo luogo interessa è quello di un titolo senza cedole, con valore facciale nominale unitario, scadenza al tempo T e interesse anticipato (d'ora in poi titolo nominale elementare: per esempio un Buono Ordinario del Tesoro), il cui prezzo reale sarà soluzione di (3.7) con $D=0$.

Tale soluzione è del tipo

$$N(r,y,p,t,T) = \frac{1}{p(t)} A(t,T) \exp[-rB(t,T)] \cdot C(t,T) \exp[-y(1-\sigma_p^2) D(t,T)] \qquad (3.8)$$

dove A(t,T), B(t,T), C(t,T) e D(t,T) sono ricavati in APPENDICE 1.

Si noti che il prezzo nominale del titolo elementare nominale è indipendente dal livello dei prezzi, soluzione della (3.5) con $C=0$ e condizione terminale $M(r,y,T,T)=1$:

$$M(r,y,t,T) = F(r,t,T)\, H(y,t,T) = A(t,T) \exp[-rB(t,T)] C(t,T) \exp\left[-y(1-\sigma_p^2) D(t,T)\right] \qquad (3.9)$$

Tale soluzione è una funzione convessa decrescente del tasso reale e dell'inflazione attesa e una funzione decrescente del tempo alla scadenza τ=T-t. E' uniformemente decrescente convessa in θ, θ_2, crescente concava in λ, ρ, σ,

σ_2 e di segno indeterminato per variazioni marginali di k, k_2, σ_p. Dato che t e T appaiono solo come tempo alla scadenza, τ=T-t, potremmo scrivere semplicemente M(r,y,τ).

La struttura per scadenza nominale risulta essere

$$I(r,y,t,T) = -\frac{\log M}{T-t} = -\frac{\log F}{T-t} - \frac{\log H}{T-t} \qquad (3.10)$$
$$= R(r,t,T) + \Pi(y,t,T)$$

vale a dire la somma di due yield curves: una curva di rendimento puramente reale ed una curva di rendimento puramente monetario (inflazionistico) (cfr. Richard (1978)).

La struttura per scadenza reale rappresenta i tassi di rendimento reale, convertiti all'unità di tempo (istante) e derivanti dal possesso fino alla scadenza di un titolo elementare reale con durata τ cioè di un titolo che dà diritto a ricevere alla data di scadenza T un'unità del bene reale; la struttura per scadenza inflazionistica riflette il tasso di rendimento richiesto per compensare il costo-opportunità del possesso, fino alla scadenza, di un contratto monetario, soggetto a svalutazione nel potere d'acquisto. E' facile dimostrare che tale tasso altro non è che il tasso d'inflazione a termine (v. APPENDICE 2).

Si noti che la scomposizione (3.10) è, in particolare, un effetto dell'ipotesi di non correlazione tra le variabili reali (tasso reale e ricchezza) e le variabili monetarie (livello dei prezzi e inflazione).

Utilizzando (3.9) abbiamo

$$R(r,t,T) = \frac{rB-\log A}{T-t} \tag{3.11}$$

$$\Pi(y,t,T) = \frac{y(1-\sigma_p^2)D-\log C}{T-t} \tag{3.12}$$

tali che, se $T\downarrow t$

$$\lim_{T\downarrow t} R(r,t,T) = r$$

$$\lim_{T\downarrow t} \Pi(y,t,T) = y(1-\sigma_p^2)$$

e, come atteso da (3.6)

$$\lim_{T\downarrow t} I(r,y,t,T) = i(r,y,t) = r(t) + (1-\sigma_p^2)\; y(t) \tag{3.13}$$

Inoltre, da (3.11)-(3.12) otteniamo

$$\lim_{T\uparrow\infty} R(r,t,T) = R_\infty = \frac{2\kappa\theta}{\kappa+\lambda+\gamma} \tag{3.14}$$

$$\lim_{T\uparrow\infty} \Pi(y,t,T) = \Pi_\infty = \frac{2\kappa_2\theta_2(1-\sigma_p^2)}{\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p+\xi} \tag{3.15}$$

per cui anche in questo modello multivariato il tasso d'interesse nominale su titoli irredimibili ($T=\infty$) è costante

$$\lim_{T\uparrow\infty} I(r,y,t,T) = I_\infty - \frac{2\kappa\theta}{\kappa+\lambda+\gamma} + \frac{2\kappa_2\theta_2(1-\sigma_p^2)}{\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p+\xi} \tag{3.16}$$

Per scadenze finite, la curva dei rendimenti in (3.10) può assumere molte forme diverse in funzione del livello corrente di r e y e dei valori dei parametri.

Essendo una funzione decrescente del prezzo del titolo, il tasso di rendimento alla scadenza è crescente con r, y, θ, θ_2 e crescente convesso in λ, σ^2, $\sigma^2{}_2$, ρ.

In analogia con CIR (1985 b, p. 394), quando il tasso reale (d'inflazione) a breve è al di sotto del suo valore di lungo periodo R_∞ (Π_∞), la struttura per scadenza reale (d'inflazione) è uniformemente crescente. Quando è maggiore di $k\theta/(k+\lambda)$ (di $k_2\theta_2(1-\sigma_p{}^2)/(k_2+\rho\sigma_2\sigma_p)$) la struttura per scadenza reale (d'inflazione) è uniformemente decrescente. Per valori intermedi la yield curve reale (d'inflazione) è a gobba.

Inoltre, quando r,y aumentano, l'effetto è maggiore per le scadenze più brevi. Quando θ,θ_2 aumentano, vengono maggiormente influenzate le scadenze più lunghe. Come in Richard (1978), variazioni di r e y non sono reciprocamente compensabili essendo $\delta I/\delta r \neq \delta I/\delta y$: per tutte le scadenze $\tau>0$, la curva dei rendimenti nominali varia in risposta ad uguali ed opposte variazioni marginali di r e y.

Il modello fornisce anche la forma esplicita della volatilità dei tassi d'interesse. Si noti, infatti, che per dato τ, si ha

$$dR(\tau) = \frac{B(\tau)}{\tau} dr$$

cioè (3.17)

$$Var_t(dR(\tau)) = \left(\frac{B(\tau)}{\tau}\right)^2 \sigma^2 r dt$$

così che, essendo $B(\tau)/\tau < 1$, vale $Var_t(dR(\tau)) < Var_t(dr)$, cioè i tassi a breve sono più volatili dei tassi a lunga scadenza, un risultato generalmente verificato nei dati e riconducibile, nelle varie teorie della term structure, alla rappresentazione dei tassi a lunga come media dei tassi a breve scadenza.

Per i tassi d'inflazione, si ha, in modo analogo,

$$d\,\Pi(\tau) = \frac{(1-\sigma_p^2) D(\tau)}{\tau} dy$$

cioè (3.18)

$$Var_t(d\,\Pi(\tau)) = \left(\frac{(1-\sigma_p^2) D(\tau)}{\tau}\right)^2 \sigma_2^2 y dt$$

e dalla somma delle due componenti si ottiene, in funzione di τ, la struttura per scadenza della volatilità dei tassi nominali:

$$Var_t(d\,I(\tau)) = \left[\left(\frac{B(\tau)}{\tau}\right)^2 \sigma^2 r + \left(\frac{(1-\sigma_p^2) D(\tau)}{\tau}\right)^2 \sigma_2^2 y\right] dt \qquad (3.19)$$

4. Strutture per scadenza e premi/sconti per la scadenza

Applicando il lemma di Itô alla (3.9) e utilizzando l'equazione di equilibrio nominale nelle derivate parziali, si ottiene il tasso di rendimento nominale (ex post) di un titolo elementare che scade al tempo T

$$\begin{aligned}\frac{dM(t,T)}{M(t,T)} &= [i-\lambda rB-\rho\sigma_2\sigma_p y(1-\sigma_p^2)D]\,dt \\ &\quad -\sigma\sqrt{r}Bdz_1-\sigma_2\sqrt{y}\,(1-\sigma_p^2)\,Ddz_2 \\ &= \alpha dt+\gamma'\,dW\end{aligned} \tag{4.1}$$

in cui $dW\equiv(dz_1,\ dz_2)'$ e $dz_1dz_2=0$ per ipotesi.

Il tasso di rendimento atteso per un periodo di detenzione istantaneo sul titolo nominale è definito da

$$E_t\left(\frac{dM(t,T)}{M(t,T)\,dt}\right) = i+\zeta \tag{4.2a}$$

in cui

$$\zeta = -\lambda rB(t,T) - \rho\sigma_2\sigma_p y(1-\sigma_p^2)\,D(t,T) \tag{4.2b}$$

è il premio (se positivo) o lo sconto (se negativo) di rendimento per il periodo di detenzione istantaneo.

Tale premio/sconto è costituito dalla somma di due fattori di rischio ciascuno dei quali è dato dal prodotto di un fattore di tipo prezzo e uno di tipo quantità: il fattore di quantità è semplicemente la sensibilità relativa del prezzo del titolo a variazioni nelle variabili di stato (rispettivamente $-B(t,T)$ e $-(1-\sigma_p^2)D(t,T)$); i 'prezzi' dei due tipi di rischio sono, rispettivamente, la covarianza, λr, tra le variazioni del tasso reale e le variazioni relative della ricchezza reale investita in modo ottimale (il portafoglio reale di mercato) e la covarianza, $\rho\sigma_2\sigma_p y$, tra le variazioni dell'inflazione attesa e dell'inflazione realizzata (assunte non correlate con variabili reali). Poiché M_r, M_y (equivalentemente $-B$ e $-D$) sono uniformemente negativi, una condizione sufficiente per premi positivi (negativi) sul tasso nominale a breve è che queste covarianze siano negative (positive). Infatti, valori alti e positivi di λ comportano che il tasso reale vari in modo strettamente correlato con la ricchezza reale e, quindi, che il prezzo del titolo vari in modo opposto ad essa, essendo alto quando la ricchezza reale è bassa e viceversa. Di conseguenza, il titolo avrà un'alta utilità marginale, crescente con λ, rappresentando una copertura assicurativa contro il rischio di perdite di benessere. In equilibrio il titolo mostrerà uno sconto sul rendimento istantaneo, necessario per compensare il beneficio assicurativo implicito nel titolo stesso.

Analogamente, se l'inflazione attesa varia con l'inflazione inattesa (l'elasticità delle aspettative è positiva) i rendimenti nominali sui titoli tenderanno ad essere più alti quando la seconda è alta fornendo una copertura assicurativa contro un'inflazione imprevista e comportando, quindi, un premio più basso (eventualmente negativo). Nelle nostre ipotesi di non correlazione tra variabili reali e variabili monetarie solo il primo fattore è presente nei rendimenti reali.

Implicito nella (4.1) è un importante risultato del modello multivariato rispetto al caso univariato, vale a dire la non perfetta correlazione tra tassi di rendimento per scadenze diverse: in particolare

$$Corr_t\left(\frac{dM(t,T)}{M(t,T)}, di\right) = \frac{-\sigma^2 rB-\sigma_2^2 y(1-\sigma_p^2)D}{\sqrt{(\sigma^2 rB^2+\sigma_2^2 y(1-\sigma_p^2)^2 D^2)(\sigma^2 r+\sigma_2^2 y(1-\sigma_p^2)^2)}} \tag{4.3}$$

che è negativa e maggiore di -1.

La trasformazione log M(t,T) ha differenziale

$$d \log M(t,T) = [\alpha-\frac{1}{2}\gamma'\gamma]\, dt + \gamma' dW \tag{4.4}$$

e integrando su (t,t+v) si ottiene

$$\log \frac{M(t+v,T)}{M(t,T)} = \int_t^{t+v} (\alpha-\frac{1}{2}\gamma'\gamma)\, du + \int_t^{t+v} \gamma'\, dW \tag{4.5}$$

Ciò consente di definire il tasso di rendimento a capitalizzazione continua per il periodo di detenzione v come (21)

$$h(t+\nu;t,T) = \frac{1}{\nu}\log\frac{M(t+\nu,T)}{M(t,T)} = \frac{1}{\nu}\left[\int_t^{t+\nu}(\alpha-\frac{1}{2}\gamma'\gamma)\,du + \int_t^{t+\nu}\gamma' dW\right] \tag{4.6}$$

per $t<t+\nu<T$. Il suo valore atteso è

$$\begin{aligned} E_t h(t+\nu;t,T) &\doteq \frac{1}{\nu}E_t\int_t^{t+\nu}(\alpha(u)-\frac{1}{2}\gamma'(u)\gamma(u))\,du \\ &= \frac{1}{\nu}E_t\int_t^{t+\nu}E_u\left[\frac{d\log M(u,T)}{du}\right]du \\ &= \frac{1}{\nu}E_t\int_t^{t+\nu}\left[\frac{d\log M(u,T)}{du}\right]du \end{aligned} \tag{4.7}$$

l'ultima uguaglianza derivando dalle proprietà degli integrali di Itô.

Dato che dlogM(u,T)/du è un tasso di rendimento per periodo di detenzione istantaneo, si ha che il tasso di rendimento atteso per il periodo di detenzione ν è il valore atteso di una media integrale (sul periodo di detenzione ν) di futuri tassi di rendimento di periodo istantaneo. In particolare, per $t+\nu=T$ (la data di scadenza) il rendimento per il periodo di detenzione diventa certo, uguale al rendimento alla scadenza:

$$\frac{1}{\tau}\log\frac{1}{M(t,T)} = I(t,T) = \frac{1}{\tau}E_t\int_t^T\left(\frac{d\log M(u,T)}{du}\right)du \tag{4.8}$$

ove τ=T-t.

L'espressione mostra che la struttura per scadenza è il valore atteso condizionato di una media temporale semplice dei futuri tassi di rendimento per periodo di detenzione istantaneo, dal momento corrente alla scadenza.

In forma esplicita

$$
\begin{aligned}
I(t,T) = & \left\{\frac{1}{\tau} E_t \int_t^T i(u)\, du\right\} + \left\{\frac{1}{\tau} E_t \int_t^T \Big[-\lambda r(u) B(u,T)\right. \\
& -\rho\sigma_2\sigma_p y(u)(1-\sigma_p^2) D(u,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 r(u) B^2(u,T) \\
& \left. -\frac{1}{2}\sigma_2^2 y(u)(1-\sigma_p^2)^2 D^2(u,T)\Big] du \right\}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

così che la struttura per scadenza corrente è uguale alla media semplice di tassi attesi futuri a breve più un premio/sconto alla scadenza (term premium) dipendente dal valore atteso delle future variabili di stato. Se la varianza delle variazioni delle variabili di stato r,y è lineare (quadratica) nei rispettivi livelli, il term premium è una funzione della media (e varianza) delle variabili di stato.

Una diversa espressione per la struttura per scadenza si può ricavare utilizzando i tassi forward (v. APPENDICE 3).

Due tipici problemi di term structure connessi ai tassi a termine riguardano il profilo della struttura per scadenza e il rapporto tra tassi a termine e tassi futuri attesi.

Circa il primo aspetto, dalla (3.10) si ottiene facilmente

$$\frac{\partial I(r,y,\tau)}{\partial \tau} = [i^F(r,y,\tau) - I(r,y,\tau)] \Big/ \tau \tag{4.10}$$

in cui $I(\tau)$ rappresenta una sorta di valor medio e $i^F(\tau)$ un valore 'marginale'. Il segno di tale derivata parziale, e quindi l'andamento localmente crescente o decrescente della term structure è il segno dello spread tra tasso a termine istantaneo e tasso spot a scadenza. Ogni segno, e quindi ogni andamento della yield curve, è possibile. In particolare, per τ prossimo a zero (brevissima scadenza) si ha

$$\lim_{\tau\downarrow 0} \frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \lim_{\tau\downarrow 0} \frac{\partial i^F}{\partial \tau}$$
$$= \frac{1}{2} \left[(\kappa(\theta - r) - \lambda r) + (1-\sigma_p^2)\,(\kappa_2(\theta_2 - y) - \rho\sigma_2\sigma_p)\right] \tag{4.11}$$

per cui il primo segmento della term structure dipende dai drift, aggiustati per il rischio, delle variabili di stato. Valori di r e y sufficientemente elevati rispetto ai valori di lungo periodo θ, θ_2 determinano una term structure almeno inizialmente decrescente.

La relazione tra i tassi forward correnti e i tassi futuri attesi si può ottenere come segue. Dall'identità

$$\log M(t,T) = E_t \int_t^T - \left(\frac{d \log M(u,T)}{du}\right) du \tag{4.12}$$

si ha

$$M(t,T) = \hat{E}_t \exp\left(-\int_t^T i(u)\,du\right) = \exp\left[E_t\int_t^T -\left(\frac{d\log M(u,t)}{du}\right)du\right]$$

$$= \exp\left[E_t\int_t^T -i(u)\,du + E_t\int_t^T\Big(\lambda r(u)\,B(u,T) + \rho\sigma_2\sigma_p y(u)\,(1-\sigma_p^2)\,D(u,T)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\sigma^2 r(u)\,B^2(u,T) + \frac{1}{2}\,\sigma_2^2 y(u)\,(1-\sigma_p^2)\,D(u,T)\Big)du\right] \tag{4.13}$$

e dalla definizione di tasso a termine

$$I^F(t,s,T) = \frac{-\log\dfrac{M(t,T)}{M(t,s)}}{T-s} = \left\{\frac{1}{T-s}E_t\int_s^T i(v)\,dv\right\} +$$

$$+\left\{\frac{1}{T-s}E_t\int_t^s \left[-\lambda r(v)\,[B(v,T)-B(v,s)] - \rho\sigma_2\sigma_p y(v)\right.\right.$$

$$(1-\sigma_p^2)\,[D(v,T)-D(v,s)] - \frac{1}{2}\,\sigma^2 r(v)\,[B^2(v,T)-B^2(v,s)$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\,\sigma_2^2 y(v)\,(1-\sigma_p^2)^2\,[D^2(v,T)-D^2(v,s)]\right]dv\right\} +$$

$$+\left\{\frac{1}{T-s}E_t\int_s^T \left[-\lambda r(v)\,B(v,T) - \rho\sigma_2\sigma_p y(v)\,(1-\sigma_p^2)\,D(v,T)\right.\right. -$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\,\sigma^2 r(v)\,B^2(v,T) - \frac{1}{2}\,\sigma_2^2 y(v)\,(1-\sigma_p^2)^2 D^2(v,T)\right]dv\right\} \tag{4.14}$$

si ottiene, tenendo presente che il tasso spot I(s,T) si può ricavare da (4.9) con t=s,

$$I^F(t,s,T) = E_t I(s,T) + \left\{ \frac{1}{T-s} E_t \int_t^s [-\lambda r(u) \, [B(u,T) - B(u,s)] - \right.$$

$$- \rho\sigma_2\sigma_p y(u) \, (1-\sigma_p^2) \, [D(u,T) - D(u,s] - \frac{1}{2}\sigma^2 r(u) \, [B^2(u,T) - B^2(u,s)]$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sigma_2^2 y(u) \, (1-\sigma_p^2)^2 \, [D^2(u,T) - D^2(u,s)]] \, du \right\} \tag{4.15}$$

Ciò significa che il tasso forward corrente su un titolo elementare che scade in T con consegna in s<T è uguale al rendimento atteso corrente in s su un titolo che scade in T più un premio/sconto il cui segno dipende, tra l'altro, dalla covarianza tra le variazioni del tasso reale e le variazioni relative della ricchezza reale investita in modo ottimale e dalla correlazione tra l'inflazione anticipata e non anticipata. Se queste covarianze sono positive, il premio è negativo. Viceversa, se sono negative o di segno diverso, il premio può essere maggiore o minore di zero.

Per T↓s, si ottiene, da (4.15)

$$i^F(t,s) = E_t i(s) + \left\{ E_t \int_t^s [-\lambda r(v) B_s(v,s) - \rho\sigma_2\sigma_p y(v) \, (1-\sigma_p^2) D_s(v,s) \right.$$

$$\left. - \sigma^2 r(v) B(v,s) B_s(v,s) - \sigma_2^2 y(v) \, (1-\sigma_p^2)^2 D(v,s) D_s(v,s)] \, dv \right\} \tag{4.16}$$

in cui il deponente s denota una derivata parziale, valutata in s, rispetto alla data di scadenza.

L'equazione esprime il tasso a termine istantaneo come somma di due valori attesi condizionati all'informazione corrente: il valore atteso del tasso spot futuro e un premio/sconto in funzione dei parametri del modello.

La forma esplicita di tale premio/sconto si può ottenere dalla (A3.8) (in APPENDICE 3) e dal valor medio condizionato del tasso spot a scadenza istantanea:

$$
\begin{aligned}
E_t i(s) &= E_t r(s) + (1-\sigma_p^2) E_t y(s) \\
&= r(t)\exp(-k(s-t)) + \theta(1-\exp(-k(s-t))) \\
&\quad + (1-\sigma_p^2)[y(t)\exp(-k_2(s-t)) + \theta_2(1-\exp(-k_2(s-t)))]
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Vale la pena notare che, anche se il premio per il rendimento istantaneo (4.2b) è zero perchè $\lambda=\rho=0$, per la diseguaglianza di Jensen tutti gli altri premi/sconti sono diversi da zero e si annullano solo nel caso non stocastico $\sigma^2=\sigma_2^2=0$.

5. La stima del modello

La stima del modello multivariato analizzato nei paragrafi precedenti presenta non poche difficoltà.

Una prima difficoltà, di ordine generale, riguarda il collegamento tra una teoria sviluppata in tempo continuo (in cui l'unità di misura temporale non ha un preciso significato reale e l'intervallo o periodo minimo è l'istante) e l'osservazione empirica che dà luogo a dati discreti su intervalli di tempo finiti (mese, giorno, ora etc.) ([22]).

Una seconda difficoltà, comune a tutti i modelli di term structure, è la non osservabilità del tasso nominale istantaneo i, cui si aggiunge nel nostro caso anche quella delle aspettative d'inflazione a breve, y, e del tasso reale r.

Una terza difficoltà è data dalla scelta tra una pluralità di metodi di stima disponibili, senza avere a disposizione, al momento, valutazioni comparative delle proprietà relative dei vari approcci soprattutto nel caso di piccoli campioni e/o corti periodi campionari.

Vi sono infatti, almeno in linea di principio, due modi per stimare i parametri fondamentali delle strutture per scadenza dei tassi d'interesse.

L'approccio time-series fa riferimento alla stima delle equazioni differenziali stocastiche che esprimono la dinamica delle variabili di stato, i cui parametri, a meno del coefficiente di premio al rischio reale λ, identificano univocamente la curva dei rendimenti a scadenza.

L'approccio cross-section, invece, stima direttamente i prezzi dei titoli a cedola fissa (nulla o positiva) essendo questi esprimibili, in base al modello, come funzioni non lineari dei parametri fondamentali, del tasso istantaneo e del tempo alla scadenza τ ([23]).

Si seguirà qui l'approccio time-series ([24]) ed in particolare il metodo, analizzato in Cesari (1989), di stima di massima verosimiglianza a tempo continuo, che consiste nel calcolare gli stimatori dei parametri come se si disponesse di un record continuo di osservazioni, trasformando poi gli stimatori ottenuti (nel continuo) in stimatori nel discreto (somme invece che integrali).
Tale metodo ha il vantaggio dell'estrema semplicità di costruzione e gode di proprietà asintotiche ottimali; inoltre, sebbene sia quasi del tutto sconosciuto in econometria, è stato da tempo applicato in problemi di statistica matematica e fisica (Taraskin (1970)).

Per avviare l'analisi empirica si è dovuto affrontare in via preliminare il problema della non osservabilità delle variabili di stato y(t) e r(t) (tasso atteso di inflazione a breve e tasso reale). Tra le due possibili soluzioni - l'uso previsivo di un modello econometrico e il ricorso ad aspettative dichiarate provenienti da sondaggi d'opinione - si è scelta la prima strada, considerata la necessità da un lato di disporre di aspettative quantitative su un breve orizzonte temporale e dall'altro di incorporare nel modello aspettative razionali nel senso di Hurwicz (1946) e Muth (1961), le cui proprietà non sempre sono rispettate dai dati di sondaggio ([25]).

In particolare, dato l'indice dei prezzi al consumo (in base 1990), p, si è stimato sul periodo 6701-9112 (300 osservazioni) un modello ARIMA 202 per il tasso d'inflazione mensile in ragione mensile, ottenendo per $h_{t+1} \equiv p_{t+1}/p_t - 1$ le stime (t di Student in parentesi):

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= \underset{(2.85)}{0.0000979} + \underset{(6.38)}{1.21368} h_t \underset{(-1.24)}{-0.22762} h_{t-1} \\ &\quad + u_{t+1} \underset{(-3.43)}{-0.65239} u_t \underset{(-1.27)}{-0.16434} u_{t-1} \\ &= \hat{h}_t + u_{t+1} \end{aligned}$$

i cui residui risultano a media nulla e non autocorrelati fino al sesto ritardo.

La stima $\hat{y}_t = \log(1+\hat{h}_t)$ è stata usata come proxy del tasso atteso d'inflazione a breve (a capitalizzazione continua) mentre il tasso nominale a breve i è stato approssimato dal tasso di rendimento netto mensile sui BOT a 3 mesi (convertito in ragione mensile e regime continuo) nelle emissioni di fine mese.

La stima di massima verosimiglianza (ML) a tempo continuo qui utilizzata si articola in due fasi ([26]).
Nella prima fase si stimano i parametri di varianza e covarianza delle SDE, date nel nostro caso da:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r)\, dt + \sigma\sqrt{r}\, dz_1 \tag{5.1}$$

$$dy(t) = \kappa_2(\theta_2 - y)\,dt + \sigma_2\sqrt{y}\,dz_2 \tag{5.2}$$

$$dp(t) = yp\,dt + \sigma_p p\sqrt{y}\,dz_3 \tag{5.3}$$

con $dz_1dz_2=dz_1dz_3=0$ e $dz_2dz_3=\rho dt$.

Le stime di σ^2_p, σ^2_2, ρ (consistenti in senso forte nel caso di un record continuo di osservazioni) si ottengono da

$$\int_0^T (dp)^2 = \sigma^2_p\int_0^T p^2 y\,dt \quad \text{da cui} \quad \sigma^2_p = \frac{\sum_1^{N-1}(p_{t+1}-p_t)^2}{\sum_1^N p_t^2 y_t w_t} \tag{5.4}$$

$$\int_0^T (dy)^2 = \sigma^2_2\int_0^T y\,dt \quad \text{da cui} \quad \sigma^2_2 = \frac{\sum_1^{N-1}(y_{t+1}-y_t)^2}{\sum_1^N y_t w_t} \tag{5.5}$$

$$\int_0^T dp\,dy = \rho\sigma_2\sigma_p\int_0^T py\,dt \quad \text{da cui} \quad \rho = \frac{1}{\sigma_2\sigma_p}\,\frac{\sum_1^{N-1}(y_{t+1}-y_t)(p_{t+1}-p_t)}{\sum_1^N p_t y_t w_t} \tag{5.6}$$

ove $w_t = 1$ per $1 < t < N$ (numerosità campionaria) e $w_t=0.5$ per $t=1,N$ è il risultato dell'approssimazione trapezoidale o di Eulero agli integrali, con $\Delta t \equiv 1$ (1 mese) ([27]).

Si può quindi stimare il tasso atteso reale come

$r_t = i_t - (1-\sigma^2_p) y_t$

e il relativo parametro di varianza

$$\int_0^T (dr)^2 = \sigma^2 \int_0^T r\,dt \quad \text{da cui} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_1^{N-1} (r_{t+1}-r_t)^2}{\sum_1^N r_t w_t} \tag{5.7}$$

Le Figg. 4 e 5 rappresentano il tasso reale a breve così ottenuto e il tasso d'inflazione a breve atteso (al tempo t-1 per il tempo t), confrontato con il tasso d'inflazione effettivo.

Le stime dei parametri sul periodo 8301-9112 (108 osservazioni mensili) sono le seguenti ([28]):

$\sigma^2_p = 0.006364 \quad \sigma^2_2 = 0.00037284 \quad \rho = 0.175 \quad \sigma^2 = 0.00072098$

Le stime dei parametri di drift k, θ, k_2, θ_2 si ottengono eguagliando a zero lo score vector (Cesari (1989) proposition 3) ricavato dalla funzione di verosimiglianza, cioè, con riferimento al tasso reale,

$$q_T(r,\alpha) \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha} \log L_T(r,\alpha)$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} A(r,\alpha)\right) G^{-2}(r)\, dr_s - \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} A(r,\alpha)\right) G^{-2}(r) A(r,\alpha)\, ds \tag{5.8}$$

ove α è il vettore dei parametri di drift, L_T è la funzione di verosimiglianza, $A(r,\alpha)=k(\theta-r)$ è il drift e $G(r)=\sigma\sqrt{r}$ è la componente di variabilità della SDE ([29]).

Usando la legge forte dei grandi numeri e il teorema del limite centrale per le martingale si dimostra, sotto opportune condizioni, la consistenza forte e l'asintotica normalità dello stimatore $\hat{\alpha}$ ([30]) nel senso che

$$I_t^{1/2}(r,\alpha)(\hat{\alpha}_t-\alpha) \overset{aD}{\sim} N(0,1) \quad \text{per } t\uparrow\infty \tag{5.9}$$

ove

$$I_t(r,\alpha)=\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}A(r,\alpha)\right)G^{-2}(r)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha'}A(r,\alpha)\right)ds \tag{5.10}$$

è interpretabile come matrice d'informazione di Fisher.

Anche nel caso della stima del drift va tenuto presente che, non essendo in realtà possibile disporre di un record continuo di osservazioni, si deve ricorrere agli stimatori discreti ottenibili da quelli continui per approssimazioni (stimatori analogici: somme anzichè integrali) e si può dimostrare (Le Breton (1976) e Prakasa-Rao e Rubin (1981)) che i primi sono stime consistenti degli stimatori continui al crescere della frequenza delle osservazioni nell'unità di tempo (cioè nell'asintoticamente piccolo) mentre questi ultimi sono consistenti per i parametri del drift solo per $T \uparrow \infty$ (cioè nell'asintoticamente grande).

Mancano, al momento analisi sistematiche e simulazioni sulla performance dei vari stimatori, tuttavia secondo alcuni risultati (per il caso di SDE di Ornstein-Uhlenbeck) la distorsione dello stimatore analogico discreto rispetto a quello continuo è dell'ordine di $\sqrt{\Delta t}$ in probabilità (Le Breton (1976)) mentre quella rispetto al parametro di drift è dell'ordine di Δt in probabilità (Bergstrom (1984) teorema 4) ([31]).

Nel nostro caso, dal metodo di ML a tempo continuo si ottengono, usando l'approssimazione trapezoidale, le seguenti stime sul periodo 8301-9112 ('t asintotici' in parentesi)

$k = 0.71913$ (6.59) $\theta = 0.0036043$ (16.71)

$k_2 = 0.27652$ (3.66) $\theta_2 = 0.0058613$ (11.52)

Si noti che le stime dei valori di steady-state θ e θ_2 non differiscono sensibilmente dalle medie temporali del tasso reale e del tasso d'inflazione attesi (rispettivamente 4.37% e 7.27% in ragione d'anno). Ciò, a parte eventuali bias dovuti a errori di misurazione e all'uso di un record discreto di osservazioni (dati mensili), potrebbe derivare dal breve intervallo campionario utilizzato (gennaio '83 - dicembre '91), tale da non riuscire a far emergere gli effettivi valori medi di lungo periodo dei processi ([32]).

Si può comunque ritenere che un tasso reale a breve di steady-state del 4.3% non sia incompatibile, nel modello teorico preso in esame, con la crescita dello stock di ricchezza reale quale si è avuta in Italia nel dopoguerra (33).

Si è infine stimato il parametro λ minimizzando la somma dei quadrati (varianza) degli scarti tra tassi teorici e tassi osservati sui BOT a 6 e 12 mesi:

$$\min_{\lambda} \sum_{j=6,12} \sum_{1}^{T} (I(t,j,\lambda)-I^{\circ}(t,j))^2 \tag{5.11}$$

ove $I(t,j,\lambda)$ è il tasso nominale con scadenza j previsto dal modello per il tempo t mentre $I^{\circ}(t,j)$ è la corrispondente osservazione empirica.
Si è così ottenuta la stima $\lambda = -0.0165$.

Le strutture per scadenza così ottenute (v. equazione (3.10)) valutate a tre specifiche date, di cui una (settembre '92) fuori dal periodo campionario, sono rappresentate, per le scadenze fino a 10 anni, nelle Figg. 6, 7, 8, rispettivamente per i tassi reali, i tassi d'inflazione a termine e i tassi nominali.
Per i tassi reali è interessante notare la velocità di aggiustamento su un valore costante (scadenza infinita) sul 4.4%. Ciò, naturalmente, non va confuso con l'ipotesi, spesso adottata per semplicità nella letteratura empirica, di 'un' tasso reale costante. Al contrario, il tasso reale

a breve mostra una pronunciata volatilità (si rammenti la Fig. 4).

Per i tassi d'inflazione a termine, le strutture per scadenza alle date più recenti mostrano un profilo quasi piatto, in contrasto con l'andamento decrescente che prevaleva negli anni della disinflazione, date le aspettative di rientro dall'inflazione incorporate nei tassi a termine.

La somma delle due componenti, reale e inflazionistica, determina la struttura per scadeza nominale. Questa, a fine '91 risultava decrescente nel primo tratto e quindi crescente verso il valore per la scadenza infinita (11.4% il tasso nel continuo).

La semplicità del metodo di stima qui adottato consente di proiettare facilmente, con le usuali tecniche econometriche, le variabili di stato del modello ottenendo una stima della struttura nominale fuori dal periodo campionario (settembre '92).

Le strutture per scadenza delle rispettive volatilità (in radici quadrate) date dalle equazioni (3.17)-(3.19) sono disegnate nelle Figg. 9, 10, 11.

6. Conclusioni

Il lavoro ha analizzato la relazione tra tassi nominali d'interesse, tassi reali e tassi attesi d'inflazione. Empiricamente si è notata la stretta correlazione tra tassi nominali e tassi d'inflazione, sia per le variabili espresse in livelli sia, negli anni più recenti, dopo la disciplina imposta dagli accordi di cambio nello SME, nelle variabili espresse in variazioni sui periodi precedenti. L'inflazione sembrerebbe quindi essere, anche in Italia, una determinante fondamentale del livello e della volatilità dei tassi d'interesse (par.2).

In ambito teorico il nesso tra tassi nominali e tassi d'inflazione è stato da tempo messo in luce nella nota equazione di Irwing Fisher che scompone, nel caso di operatori razionali con perfette previsioni, il tasso nominale in un tasso reale atteso e un tasso atteso d'inflazione. In condizioni di incertezza e avversione al rischio l'equazione di Fisher è stata generalizzata in una relazione che scompone l'intera struttura per scadenza dei tassi nominali nella somma di una struttura dei tassi reali, relativi a titoli privi di rischio d'insolvenza e rappresentativi del diritto a un'unità del bene reale (o paniere di beni) alla scadenza, più una struttura dei tassi d'inflazione a termine, vale a dire dei tassi di crescita impliciti nei prezzi a termine del bene reale (par.3).
Il modello sviluppato, che specializza quello ormai classico di equilibrio generale di Cox, Ingersoll e Ross (1985a) al caso di tre variabili di stato (tasso reale a

breve, tasso atteso d'inflazione e livello generale dei prezzi) ha consentito di analizzare le determinanti dei premi per la scadenza impliciti nei rendimenti per periodo di detenzione, a pronti e a termine (par.4).

La stima del modello (par.5), fatta secondo l'approccio time-series, con un metodo di massima verosimiglianza di facile applicabilità anche ad un modello multivariato come quello in esame, ha permesso di ottenere, per i titoli di Stato, una prima stima delle strutture per scadenza reali e d'inflazione implicite nei tassi nominali.

APPENDICI

APPENDICE 1.

Un titolo senza cedole, con valore facciale nominale unitario, scadenza al tempo T e interesse anticipato ha prezzo in termini reali N(r,y,p,t,T) soluzione di

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2 r\, N_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\, y\, N_{yy} + \rho\sigma_2\sigma_p ypN_{yp} + \frac{1}{2}\,\sigma_p^2 yp^2\, N_{pp} + \\
&\qquad + [\kappa(\theta-r) - \lambda r]N_r + \kappa_2(\theta_2-y)\, N_y + ypN_p \\
&\qquad + N_t - rN = 0 \\
&N(r,y,p,T,T) = 1/p(T)
\end{aligned} \tag{A1.1}$$

con rappresentazione stocastica

$$N(r,y,p,t,Y) = \hat{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(v)\,dv\right)\frac{1}{p(T)}\right] \tag{A1.2}$$

Per risolvere tale equazione si può verificare una soluzione a varabili separate del tipo

$$\begin{aligned}
&N(r,y,p,t,T) = F(r,t,T)\; G(y,p,t,T) \\
&\text{con } F(r,T,T) = 1 \\
&G(y,p,T,T) = 1/p(T)
\end{aligned} \tag{A1.3}$$

ottenendo

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r F_{rr} + [\kappa(\theta - r) - \lambda r]\, F_r + F_t - rF = 0$$

$$F(r,T,T) = 1 \tag{A1.4}$$

e

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 y G_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_p^2 y p^2 G_{pp} + \rho\sigma_2\sigma_p y p G_{py} + \kappa_2(\theta_2 - y)\, G_y +$$
$$+ ypG_p + G_t = 0$$

$$G(y,p,T,T) = 1/p(T) \tag{A1.5}$$

La prima equazione (A1.4) è quella ricavata da CIR (1985b p. 393) nel loro modello univariato ed ha soluzione

$$F(r,t,T) = A(t,T)\ \exp\,[-rB(t,T)] \tag{A1.6a}$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma \exp\,[(\kappa+\lambda+\gamma)\ (T-t)/2]}{(\gamma+\kappa+\lambda)\ (\exp(\gamma(T-t))-1) + 2\gamma}\right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \tag{A1.6b}$$

$$B(t,T) = \frac{2\,[\exp(\gamma(T-t))-1]}{(\gamma+\kappa+\lambda)\ (\exp(\gamma(T-t))-1) + 2\gamma} \tag{A1.6c}$$

$$\gamma = [(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2]^{1/2} \tag{A1.6d}$$

Si noti, da (3.7) e dalla proprietà di Markov di r, che F(r,t,T) è il prezzo in termini reali di un titolo senza rischio d'insolvenza che dà diritto a un'unità del bene reale alla scadenza T e a nessun pagamento intermedio (zero-coupon real bond).

Per risolvere (A1.5) verifichiamo una soluzione del tipo

$$G(p,y,t,T) = \frac{1}{p(t)} H(y,t,T)$$
$$\text{con } H(y,T,T) = 1 \tag{A1.7}$$

che risulta, dopo semplici passaggi e un cambiamento di variabile, formalmente identica alla (A1.4) e quindi con la medesima soluzione, modificata con r, σ^2, λ, k, θ sostituiti da

$$(1-\sigma_p^2)y, \quad \sigma_2^2(1-\sigma_p^2), \quad \rho\sigma_2\sigma_p, \quad k_2, \quad \theta_2(1-\sigma_p^2)$$

Come si dimostrerà più oltre (APPENDICE 2) la funzione G, soluzione di (A1.5) risulta essere uguale al reciproco del prezzo nominale forward del bene reale.

In conclusione la soluzione dello zero-coupon bond è

$$N(r,y,p,t,T) = \frac{1}{p(t)} A(t,T) \exp[-rB(t,T)] \cdot$$
$$C(t,T) \exp[-y(1-\sigma_p^2) D(t,T)] \tag{A1.8a}$$

dove A(t,T), B(t,T) sono le funzioni sopra ricavate e

$$C(t,T) = \left[\frac{2\xi \exp[(\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p+\xi)\ (T-t)/2]}{(\xi+\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p)\ (\exp(\xi(T-t))-1) + 2\xi}\right]^{\frac{2\kappa_2\theta_2}{\sigma_2^2}} \tag{A1.8b}$$

$$D(t,T) = \frac{2[\exp(\xi(T-t)) - 1]}{(\xi+\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p)\ (\exp(\xi(T-t))-1) + 2\xi} \tag{A1.8c}$$

$$\xi = \left[(\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p)^2 + 2\sigma_2^2(1-\sigma_p^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A1.8d}$$

APPENDICE 2.

Sia Q(t,T) il prezzo forward (concordato al tempo t) di un'unità del bene da scambiare al tempo T.

Risulta, per la condizione di non arbitraggio, in termini nominali

$$Q(t,T)M(t,T)= \rho_t(p(T)) \tag{A2.1}$$

ed in termini reali

$$\frac{Q(t,T)M(t,T)}{p(t)}=\rho^{\circ}_{t}(1(T))=F(t,T)$$

(A2.2)

dove ρ_t è l'operatore valore attuale nominale (Ross(1978)) mentre ρ°_t è il corrispondente operatore in termini reali. Dalla soluzione per la struttura nominale M(t,T) si ottiene subito

$$Q(t,T) = p(t)\ F(t,T)/M(t,T) = p(t)/H(y,t,T) \qquad \text{(A2.3)}$$

da cui si ricava il tasso d'inflazione a termine (nel continuo) tra t e T

$$\frac{\log(Q(t,T)/p(t))}{T-t}=-\frac{\log(H(y,t,T))}{T-t}=\Pi(y,t,T)$$

(A2.4)

APPENDICE 3.

Come noto, l'ipotesi di non arbitraggio implica che il prezzo nominale a termine di un titolo elementare che scade in T, scambiato in s < T è

$$Q(t,s,T)=\frac{M(t,T)}{M(t,s)}=\frac{F(t,T)}{F(t,s)}\,\frac{H(t,T)}{H(t,s)}=$$

$$=\frac{A(t,T)}{A(t,s)}\exp\left[-r(B(t,T)-B(t,s))\right]\frac{C(t,T)}{C(t,s)}\cdot$$

$$\exp\left[-y(1-\sigma_p^2)\ (D(t,T)-D(t,s))\right]$$

(A3.1)

e quindi il tasso nominale a termine (tasso forward) è, per definizione,

$$I^F(t,s,T) = \frac{-\log Q}{T-s} = \frac{-\log M(t,T) + \log M(t,s)}{T-s}$$
$$= \frac{I(t,T)\,(T-t) - I(t,s)\,(s-t)}{T-s}$$

(A3.2)

cioè una media ponderata dei tassi di rendimento a pronti I(t,T) e I(t,s) ovvero anche

$$I^F(t,s,T) = R^F(t,s,T) + \Pi^F(t,s,T)$$
$$= \frac{R(t,T)\,(T-t) - R(t,s)\,(s-t)}{T-s} + \frac{\Pi(T,t)\,(t-T) - \Pi(T,s)\,(s-t)}{T-s}$$

(A3.3)

dove R^F è il tasso reale a termine su un titolo elementare reale e Π^F è il tasso d'inflazione a termine tra s e T (tasso implicito di crescita del prezzo nominale a termine del bene reale tra s e T):

$$R^F(t,s,T) = -\frac{\log\left(\frac{F(t,T)}{F(t,s)}\right)}{T-s}$$

(A3.4)

$$\Pi^F(t,s,T) = -\frac{\log\left(\frac{H(t,T)}{H(t,s)}\right)}{T-s} = \frac{\log\left(\frac{Q(t,T)}{Q(t,s)}\right)}{T-s}$$

(A3.5)

Q(t,T) essendo il prezzo a termine del bene introdotto nell'APPENDICE 2.

In particolare, il tasso a termine istantaneo, implicito in t per consegna in s di un titolo con scadenza immediata si ottiene da (A3.2) per T↓s

$$i^F(t,s) = \lim_{t\downarrow s} \frac{\left(-\log\frac{M(t,T)}{M(t,s)}\right)}{T-s} = -\frac{M_s(t,s)}{M(t,s)} = -\frac{\partial \log M(t,s)}{\partial s} \qquad (A3.6)$$

da cui, integrando tra t e T

$$I(t,T) = \frac{1}{\tau}\int_t^T i^F(t,s)\,ds \qquad (A3.7)$$

che indica che la struttura per scadenza è una media temporale semplice dei tassi forward istantanei correnti per ogni data di consegna tra la data corrente t e la scadenza T.

Dalla forma esplicita della struttura per scadenza si ricava l'espressione del tasso a termine istantaneo in funzione delle variabili fondamentali del modello:

$$\begin{aligned} i^F(r,y,\tau) &= -\frac{F_\tau}{F} - \frac{H_\tau}{H} = rB_\tau - \frac{A_\tau}{A} + y(1-\sigma_p^2)\,D_\tau - \frac{C_\tau}{C} \\ &= r\left[1-(\kappa+\lambda)\,B - \frac{1}{2}\,\sigma^2 B^2\right] + \kappa\theta B + \\ &\quad y(1-\sigma_p^2)\left[1-(\kappa_2+\rho\sigma_2\sigma_p)\,D - \frac{1}{2}\,\sigma_2^2\,(1-\sigma_p^2)\,D^2\right] + \kappa_2\theta_2\,(1-\sigma_p^2)\,D \end{aligned} \qquad (A3.8)$$

E' immediato verificare che

$$\lim_{\tau\downarrow 0} i^{F}(r,y,t) = i \tag{A3.9}$$

$$\lim_{\tau\uparrow\infty} i^{F}(r,y,\tau) = I_{\infty} \tag{A3.10}$$

NOTE

1. Il lavoro rielabora alcuni capitoli di Cesari (1987). Una precedente versione è stata presentata all'incontro di studio SIS su "Modelli statistici per l'analisi dei mercati finanziari" tenutosi a Pisa il 12 e 13 dicembre 1991. Un ringraziamento va a C. Bianchi, C. D'Adda, A. Gardini, J. Mirrlees, S. Schaefer e I. Visco. La presente versione deve molto ai puntuali commenti di F. M. Drudi. Come al solito, ogni responsabilità per i contenuti del lavoro è solo dell'autore.

2. L'analisi del 1811 è in un discorso ai Comuni sul Bullion Report, riportato in appendice all'edizione del 1939 del Paper Credit. Nel modello di Wicksell (1898) è il tasso d'interesse (o meglio la differenza tra il tasso di mercato e quello naturale o normale) a influenzare l'andamento dei prezzi dei beni. Si veda Hicks (1970) per una rielaborazione del modello di Wicksell e Lutz (1974) per un tentativo di fusione delle due teorie. Sargent (1973) sottolinea la reciproca dipendenza dei tassi d'interesse e di inflazione.

3. Una correlazione positiva tra tasso d'interesse nominale e tasso d'inflazione fu documentata su serie secolari da A.H.Gibson negli anni '20 e fu chiamata da Keynes (1930 cap.30) "paradosso di Gibson". Infatti, se da una parte la teoria quantitativa, riconducendo l'aumento dei prezzi ad un eccesso di creazione monetaria (per data produzione e velocità di circolazione), lo correlava ad una riduzione del tasso d'interesse, d'altra parte lo stesso Keynes (1930 cap.11) seguendo Wicksell, collegava variazioni del tasso d'interesse di mercato rispetto al tasso naturale (o d'equilibrio) a variazioni di segno opposto nel livello dei prezzi per l'effetto del primo sull'attività di investimento. Più cauto era stato il Cantillon (1755 cap.10) secondo cui il segno della correlazione dipende, con terminologia moderna, dal canale di trasmissione degli impulsi monetari: "l'abbondanza o la scarsità di denaro in uno Stato producono sempre rispettivamente un rialzo o un ribasso di tutti i prezzi" ma si risolvono rispettivamente in una diminuzione o aumento del tasso d'interesse se provenienti "da coloro che concedono prestiti" (gli operatori in surplus) ovvero da "persone che spendono" (gli operatori in deficit).

4. La neutralità dell'inflazione è detta anche superneutralità della moneta. L'invarianza del tasso reale rispetto all'inflazione attesa è stata messa in dubbio fin dalle analisi empiriche dello stesso Fisher che ponevano in evidenza nel breve periodo (assunta l'inflazione attesa in funzione dell'inflazione realizzata nel passato) un aggiustamento solo parziale dei tassi nominali e quindi una

riduzione del tasso reale al crescere dell'inflazione: "when prices are rising, the [nominal] rate of interest tends to be high but not so high as it should be to compensate for the risk" (Fisher (1930) p.43). Una spiegazione di tale correlazione negativa è stata elaborata da Mundell (1963) e da Tobin (1965) sulla base dell'effetto di real balance indotto dall'inflazione e sul conseguente aumento del risparmio per compensare la riduzione di ricchezza reale. Darby (1975) e Feldstein (1976) hanno espresso l'equazione di Fisher con riferimento a tassi al netto delle imposte (di aliquota δ) per cui in mancanza di un aumento più che proporzionale ($1/(1-\delta)$) del tasso lordo nominale al crescere dell'inflazione si avrebbe 'illusione fiscale'. In un modello alla Sargent (1973) l'esistenza di una curva di Phillips di breve periodo è sufficiente per spiegare la correlazione negativa tra inflazione attesa e tasso reale. Day (1985) invece costruisce un modello con offerta reale stocastica e livello dei prezzi (via teoria quantitativa) funzione inversa dell'offerta. Poichè il tasso reale (nel caso di avversione al rischio) risulta crescente col prodotto ne segue immediatamente l'osservata controvariazione del primo con l'inflazione attesa. Una ulteriore semplice spiegazione della correlazione negativa tra tasso reale e tasso d'inflazione in termini di diseguaglianza di Jensen sarà fornita più avanti.

5. Si vedano le recenti rassegne di Rovelli (1984) e Monticelli (1987).

6. Tra le eccezioni Roll (1973), Long (1974), Fama (1975,1976), Brealey e Schaefer (1977) e Richard (1978). In Italia si segnala il contributo di Masera (1977).

7. Un'ulteriore complicazione deriva dal fatto che ci sono tanti tassi di interesse quante tipologie di titoli e tanti tassi d'inflazione quanti panieri di beni.

8. Un'evidenza indiretta a favore del modello multivariato qui proposto sembra emergere anche dall'approccio APT applicato ai titoli di Stato italiani (Esposito (1991), Drudi e Panetta (1991)).

9. Per i Buoni Ordinari del Tesoro a 3, 6, e 12 mesi si sono avute emissioni con frequenza regolare almeno mensile rispettivamente dal novembre '79, dal gennaio '76 e dal novembre '76. In alcuni dei periodi precedenti sono mancate le emissioni per alcune o anche tutte le tre scadenze. Pertanto, a fini puramente descrittivi, i tassi all'emissione mancanti sono stati stimati per interpolazione lineare cross-time per i BOT a 6 e 12 mesi e cross-maturity per i BOT a 3 mesi. I tassi sui BTP riguardano i rendimenti medi netti dei BTP con vita residua superiore ad un anno, quotati alla Borsa di Milano.

10. La spiegazione del "paradosso" avanzata da Gibson (secondo cui variazioni nella spesa monetaria per consumi, dovute all'andamento dei prezzi, determinano variazioni inverse nell'ammontare del risparmio) dimentica, osserva Keynes, che anche i redditi monetari variano nella stessa misura dei prezzi.
La spiegazione "tentata" dallo stesso Keynes fa riferimento ai ritardi di aggiustamento del tasso di mercato al tasso naturale d'interesse (inteso come tasso d'equilibrio tra risparmio e investimento). Al variare del tasso naturale, il tasso di mercato si adegua con ritardo creando squilibri nella domanda d'investimenti e tensioni sul livello dei prezzi per cui ciò che si osserva è la tendenza di fondo del tasso di mercato (guidato dal tasso naturale) accompagnata da analoghe variazioni dei prezzi causate dai ritardi di aggiustamento.

11. Le principali ipotesi poste da CIR (1985 a) alla base del loro modello riguardano la perfetta continuità degli scambi e dell'equilibrio di mercato, l'assenza di tasse, vincoli istituzionali e costi di transazione, la perfetta divisibilità e liquidità dei titoli, l'aggregabilità degli operatori (in numero prefissato) in un unico individuo rappresentativo (informazioni e convinzioni omogenee), la razionalità delle aspettative e la massimizzazione dell'utilità attesa del consumo, assunta temporalmente separabile e concava (avversione al rischio) su un orizzonte temporale finito. Essi assumono inoltre l'esistenza di un unico bene prodotto con N diverse tecnologie, in funzione di K variabili di stato descritte da altrettanti processi di diffusione (ovvero da K equazioni differenziali stocastiche di Itô) e l'esistenza di una base di K attività finanziarie necessarie e sufficienti per replicare, con strategie di trading nel continuo, ogni altro titolo (mercati completi). I prezzi di tali attività sono anch'essi processi di diffusione.
Molte delle suddette ipotesi, tuttavia, non sono essenziali ai fini del modello e sono state generalizzate in seguito (cfr. Cesari (1987) cap.1). Le ulteriori semplificazioni introdotte in CIR (1985 b) riguardano la funzione di utilità (indipendente dalle variabili di stato, con preferenza temporale costante, logaritmica (avversione al rischio relativa costante)) e il numero e la dinamica delle variabili di stato.

12. Nelle ipotesi di CIR (1985 b) il tasso istantaneo reale r è determinato endogenamente e risulta funzione lineare dell'unica variabile di stato y_1 che per ipotesi descrive le condizioni della produzione. Poichè tale relazione è invertibile r può essere usato come variabile strumentale per y_1. In equilibrio, r eguaglia il valor medio del tasso di riduzione dell'utilità (indiretta) marginale della ricchezza reale: $rdt = E_t(-dJ_W/J_W)$ nonchè, equivalentemente, il tasso atteso di rendimento della ricchezza al netto della sua variabilità attesa: rdt =

$E_t(dW/W+C/Wdt)-Var_t(dW/W)$, C essendo il flusso di consumo reale.

13. La "moneta" implicita nel modello è una "moneta parziale" (secondo la terminologia di Hicks (1967) cap.1), con funzione di semplice unità di conto: non semplicemente il numerario walrasiano, privo di rilevanza e di concreta esistenza per gli operatori economici, ma non più di uno standard per denominare i pagamenti su titoli e altri contratti. In particolare essa non è mezzo di pagamento nè un'attività utilizzabile come riserva di valore. Modi più sofisticati per formulare un'analisi in termini monetari potrebbero essere l'introduzione di real money balances nella funzione di utilità (Poncet (1983), Stulz (1986)) e di un processo produttivo per la moneta, ovvero forme di cash-in-advance o liquidity constraints (Stockman (1981)). Una rassegna su tassi, inflazione e crescita secondo un approccio di equilibrio generale con una moneta-unità di conto si trova in Breeden (1986).

14. Il modello univariato di CIR (1985 b) è stato generalmente applicato ai tassi nominali. Fanno eccezione Gibbons e Ramaswamy (1986) e Brown e Schaefer (1988) che lo verificano su tassi reali.

15. I parametri k e k_2 hanno dimensione 1/tempo (v. Gandolfo (1981) p.12).

16. Una dinamica alternativa per il tasso istantaneo reale è quella di Ornstein-Uhlenbeck

$$dr(t) = \kappa(\theta-r)\,dt + \sigma\,dz_1$$

con distribuzione normale e possibilità di valori negativi. Il modello Ornstein-Uhlenbeck è analizzato in Cesari (1987), Appendice I.5A.

17. Se si definisce l'elasticità delle aspettative inflazionistiche (cfr. Hicks (1939) p.205) come

$$\epsilon\left(y, \frac{dp}{p}\right) = \frac{dy}{\left(\frac{dp}{p}\right)^2} \frac{\frac{dp}{p}}{y}$$

si ottiene

$$\epsilon\left(y, \frac{dp}{p}\right) = \frac{\sigma_2\rho}{\sigma_p y}$$

una quantità che tende a 0 al crescere di y, anche se $\rho=1$. Questo risultato, poco convincente, sarebbe evitato se la dinamica dell'inflazione attesa fosse data da

$$dy(t) = \mu_2(y)dt + \sigma_2 y^{3/2}dz_2$$

nel qual caso l'elasticità sarebbe costante, uguale a $\sigma_2\rho/\sigma_p$ e perfetta quando $\sigma_2\rho=\sigma_p$.
In questo caso, tuttavia, l'analisi del modello e la sua applicazione diventerebbero decisamente più complicate (v. CIR (1985b) p. 403 per la soluzione in forma chiusa).

18. Che i(t) sia il tasso istantaneo nominale è dimostrabile definendo il tasso di rendimento nominale (nel continuo) $I(t,\tau)$ di un titolo elementare con scadenza τ come $M(t,\tau)=\exp(-I(t,\tau)\tau)$, sostituendo quindi M nella PDE (3.13b) e facendo tendere τ a zero. Ne risulterà lim $I(t,\tau)=i$.

19. Più in generale, seguendo CIR (1985 b) p.405 si può dimostrare che nel caso di correlazione tra variabili reali e variabili monetarie vale la scomposizione
$i = r + y - Var_t(dp/p) - Cov_t(dW/W,dp/p)$
Espressioni più complesse si ottengono in presenza di altre K variabili di stato e di funzioni di utilità non logaritmiche e state-dependent.

20. In un modello più generale (che lasciamo a futuri approfondimenti) in cui variabili reali e variabili monetarie possono essere correlate, una correlazione negativa tra inflazione attesa e tasso reale potrebbe persistere anche dopo aver tenuto conto dell'effetto Jensen nell'equazione di Fisher.

21. Come sottolineato da CIR (1981), vi sono diversi modi di definire i tassi di rendimento (e le condizioni di equilibrio). In particolare
$dM/(Mdt)$, $-Md(1/M)/dt$, $d\log M/dt$
ove la prima variazione fa riferimento alla crescita del valore attuale, la seconda alla riduzione del montante, la terza alla crescita a capitalizzazione continua del valore attuale. Le tre definizioni (e le corrispondenti condizioni di equilibrio) sono equivalenti solo nel caso deterministico.

22. Si noti che, ad esempio, la formula del prezzo di un titolo elementare reale è invariante a trasformazioni di scala per tempo e tassi (es. da tempo in anni e tassi annui (τ,r) a tempo in mesi e tassi mensili $(\tau*12,\ r/12)$) se τ viene moltiplicato e r, k, θ, σ e λ vengono tutti divisi per la costante di scala (es. 12).

23. Si veda Brown e Dybvig (1986) e per il caso italiano Barone, Cuoco e Zautzik (1989). L'approccio cross-section, al momento, è stato applicato solo al modello univariato (senza livello dei prezzi e inflazione)

consentendo di identificare solo quattro 'parametri' r, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ove

Nel nostro caso multivariato il minimo numero di parametri necessario per identificare le strutture per scadenza sarebbe doppio, rispetto alla medesima base dati.

24. A tale approccio, generalmente a due stadi per la necessità di stimare anche il parametro λ di prezzo del rischio, appartengono Marsh e Rosenfeld (1983), che calcolano stime di massima verosimiglianza sulla base delle densità di transizione delle variabili di stato (processi diffusivi), Brennan e Schwartz (1979), Fischer e Zechner (1984) e Barone e Cesari (1986) che con opportune trasformazioni e approssimazioni riconducono le SDE non lineari di partenza a SDE lineari con note soluzioni a tempo discreto, Longstaff e Schwartz (1991) che usano il metodo dei momenti (GMM) per stimare un sottoinsieme dei parametri di un modello a due fattori.

25. Visco (1984, 1986) mostra che a partire dal primo shock petrolifero le aspettative d'inflazione del sondaggo 'Mondo Economico' rigettano l'ipotesi di razionalità, mostrando persistenti distorsioni e autocorrelazioni negli errori di previsione.

26. Per approfondimenti si rinvia a Cesari (1989).

27. McShane (1983) p.62 confronta varie approssimazioni discrete agli integrali.

28. Si è considerato il periodo campionario dal gennaio 1983 poichè da alcune analisi preliminari fino a tutto ottobre 1982 vi sarebbero evidenze di tassi attesi reali a breve negativi, una possibilità non compatibile con la dinamica 'square root' assunta per il tasso reale istantaneo.

29. Nel caso di distrurbi browniani non è difficile dimostrare, anche nel caso continuo, l'equivalenza tra stimatore di ML e stimatore di minima distanza (minimi quadrati ponderati):

$$\min_{\alpha} \int_0^T [dr-A(r,\alpha)ds]'G^{-2}(r)\,[dr-A(r,\alpha)ds]$$

30. McKeague (1984) dimostra che nel caso di processi stazionari ergodici le proprietà asintotiche continuano a valere anche se il coefficiente di diffusione G(r) è stato malspecificato (perdita di efficienza).

$$\phi_1=\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}, \qquad \phi_2=(k+\lambda+\phi_1)/2, \qquad \phi_3=2k\theta/\sigma^2$$

31. Nel caso di processi non stazionari sembra emergere, da alcune analisi, la preferibilità di opportuni schemi campionari discreti anche rispetto al caso limite di un record continuo di osservazioni su un intervallo finito (v. Novikov (1972), Shiryayev (1974) e Phillips (1987)).

32. Un ampliamento retrospettivo dell'intervallo campionario comporterebbe da un lato difficoltà nella modellistica per l'inclusione di periodi caratterizzati da tassi reali anche negativi (v. anche Banca d'Italia (1983) p.30) quindi con dinamiche necessariamente diverse da quelle qui assunte, dall'altro problemi nei dati per l'assenza, prima del 1975, di un vero e proprio mercato monetario, per la non sistematicità delle emissioni mensili del BOT fino a tutto il 1979, per la presenza, fino al 1983, di metodi non competitivi di collocamento dei BOT a tre mesi.

33. Si rammenti che nel modello di CIR (1985 b), in equilibrio, il tasso reale a breve privo di rischio, r, eguaglia il tasso atteso di rendimento della ricchezza reale W al netto della sua variabilità attesa (data l'ipotesi di avversione al rischio e l'incertezza derivante dagli shocks esogeni sulla funzione di produzione): $rdt=E_t(dW/W+C/Wdt)-Var_t(dW/W)$ (ove C è il consumo reale). Una serie storica aggiornata della ricchezza reale in Italia non è disponibile. Tuttavia, in base alle stime per il ventennio '51-'70 (ISTAT (1986) p.238) la crescita dello stock di capitale fisso è risultata intorno al +4% in media annua. Inoltre, nel periodo '74-'91 (il più ampio disponibile) la crescita reale media annua delle attività finanziarie sull'interno del settore non statale è stata del +5,1% al lordo e del +5,7% al netto delle azioni. In un'ipotesi di sostanziale stabilità del rapporto tra attività reali e attività finanziarie tali tassi di crescita sono indicativi anche della crescita della ricchezza reale nell'ultimo ventennio.

FIG. 1

TASSI D'INTERESSE E TASSI D'INFLAZIONE
(1969 - 1991)

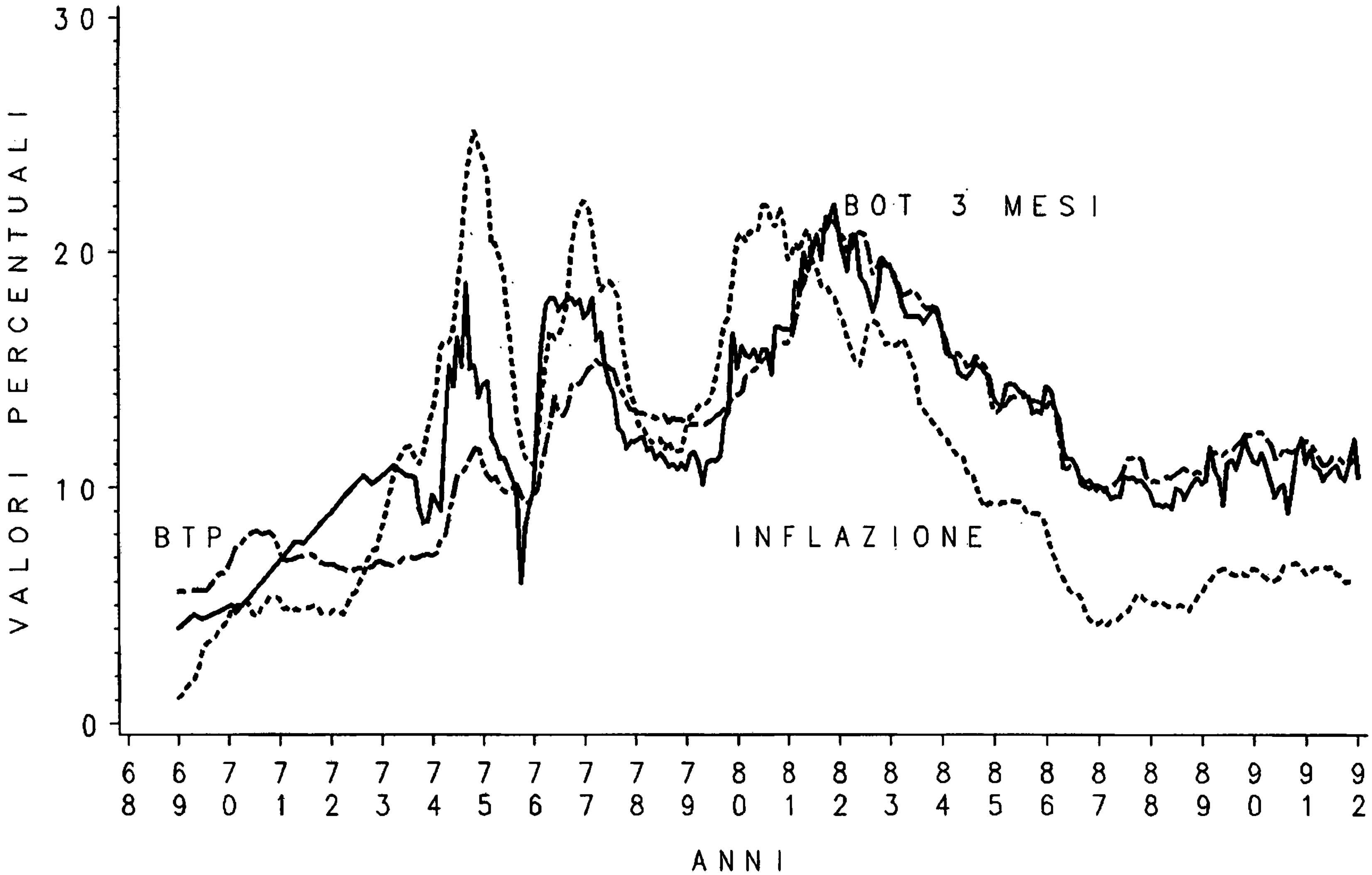


FIG. 2

VOLATILITA' DEI TASSI D'INTERESSE E D'INFLAZIONE

VARIAZIONI SUL MESE CORRISPONDENTE DELL'ANNO PRECEDENTE

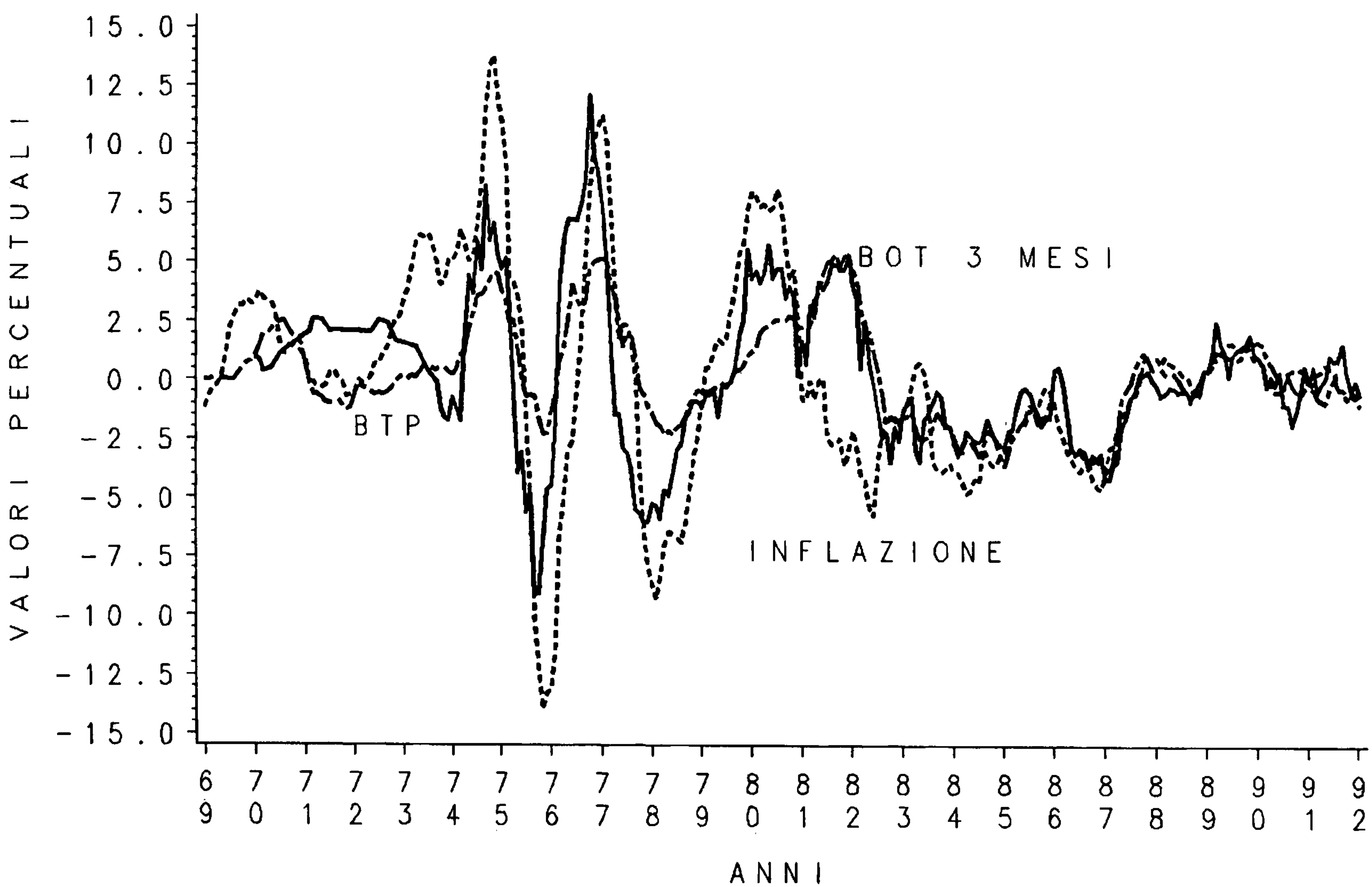


FIG. 3

VOLATILITA' DEI TASSI D'INTERESSE E D'INFLAZIONE

VARIAZIONI SULL'ANNO PRECEDENTE DEI TASSI MEDI ANNUI

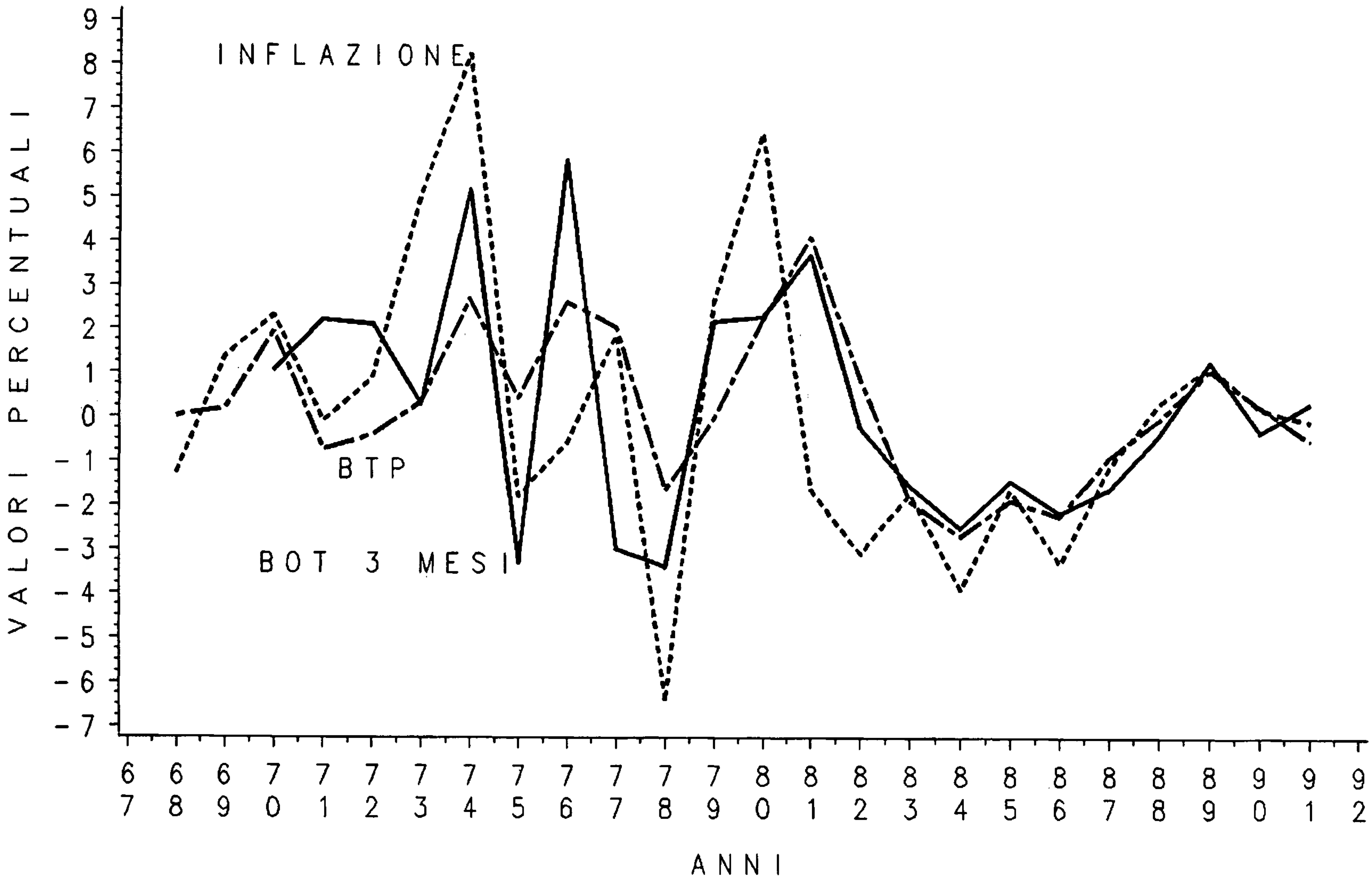


FIG. 4

TASSI D'INTERESSE REALE A BREVE

TASSI IN RAGIONE D'ANNO

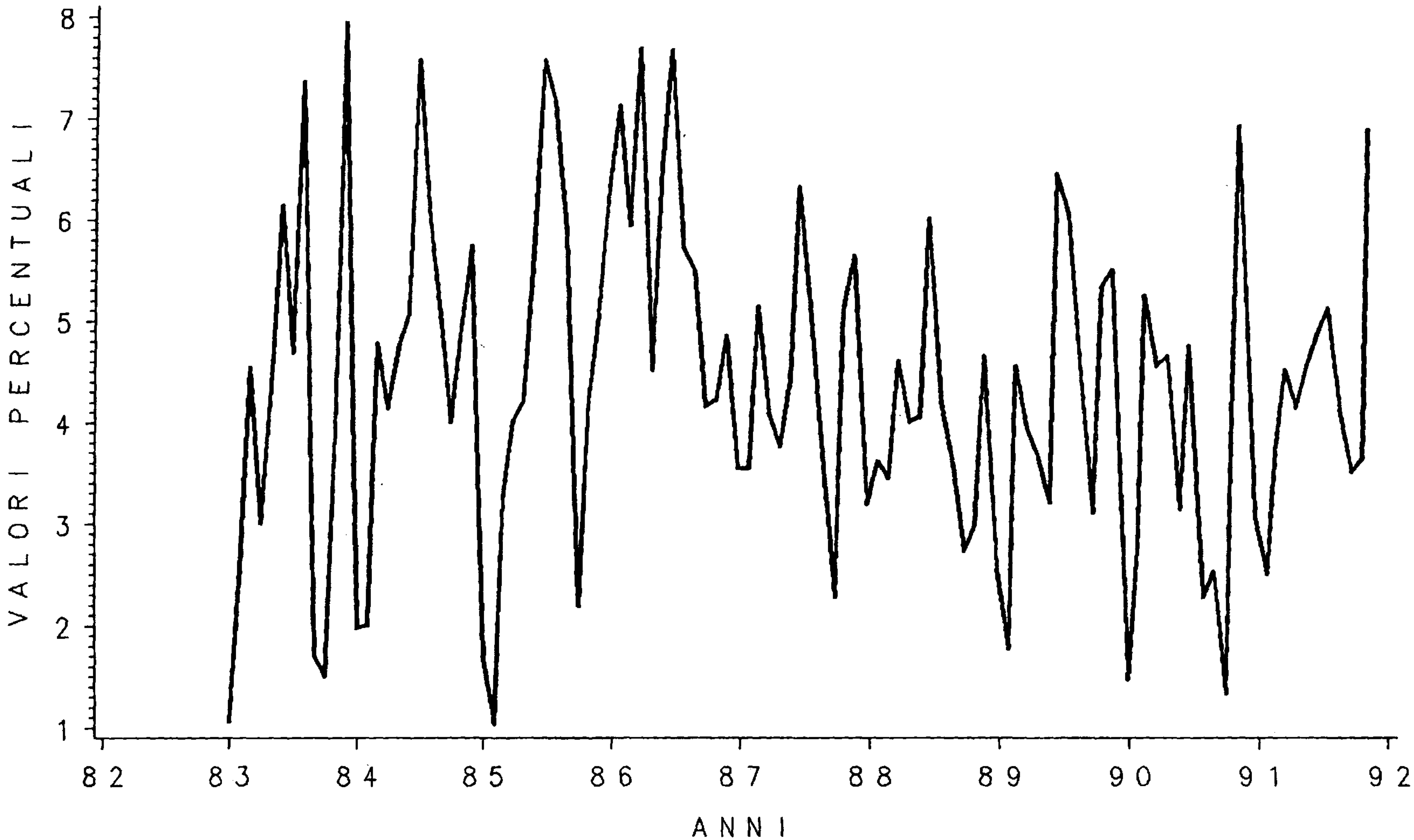


FIG. 5

TASSI D'INFLAZIONE A BREVE EFFETTIVI E ATTESI

TASSI IN RAGIONE D'ANNO

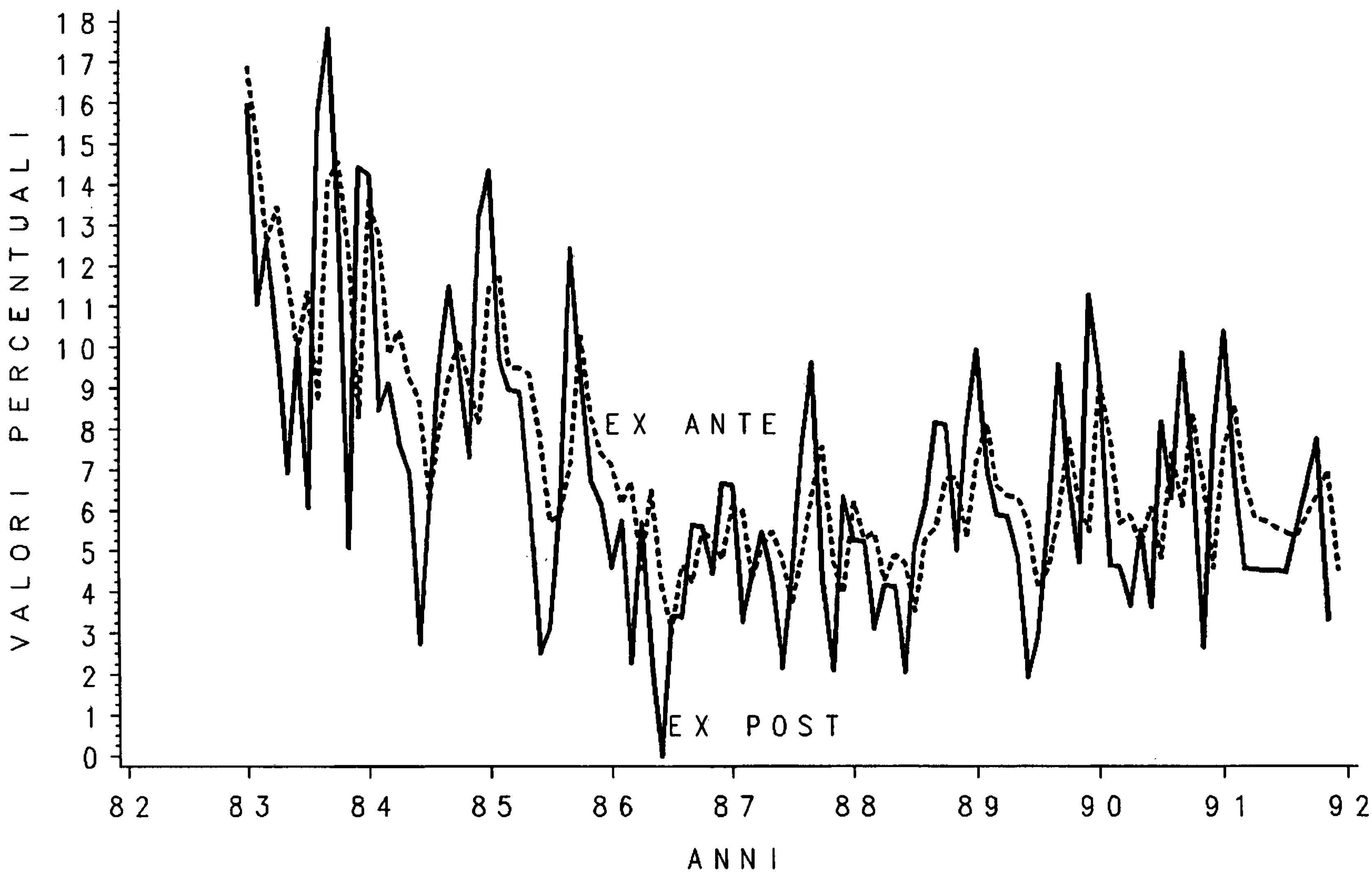


FIG. 6

STRUTTURE PER SCADENZA DEI TASSI REALI

TASSI NETTI ANNUI NEL DISCRETO

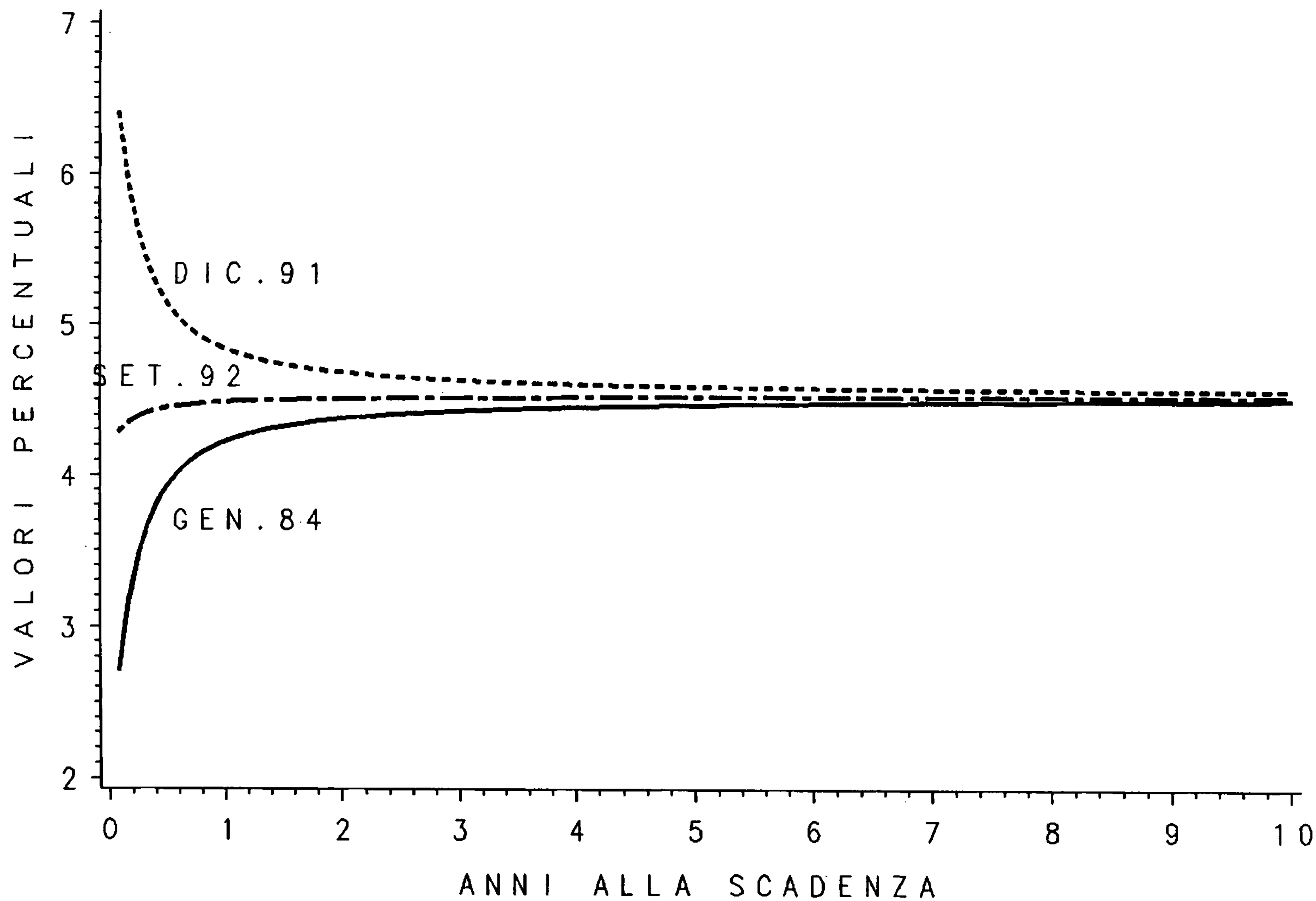


FIG. 7

STRUTTURE PER SCADENZA DEI TASSI D'INFLAZIONE

TASSI NETTI ANNUI NEL DISCRETO

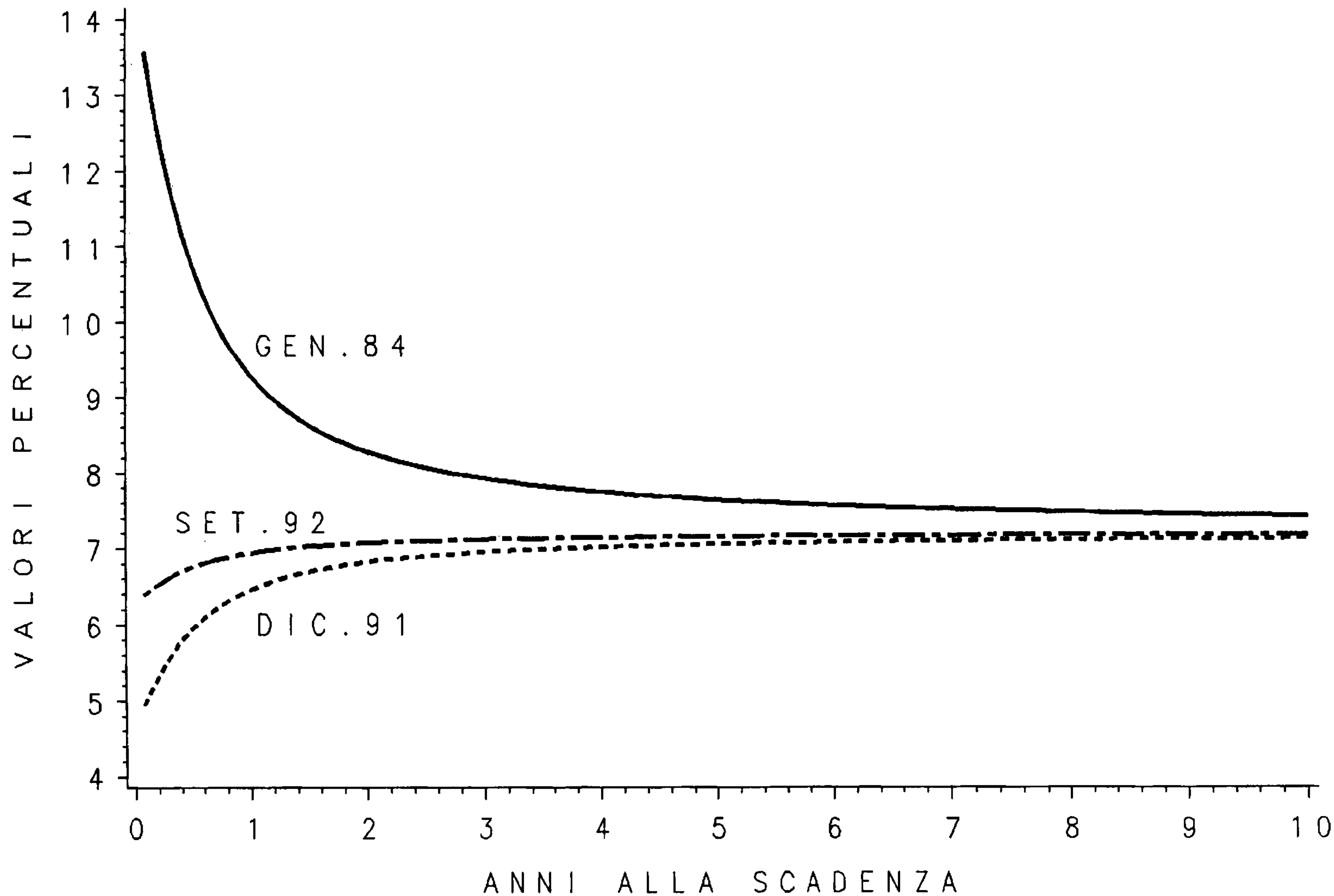


FIG. 8

STRUTTURE PER SCADENZA DEI TASSI NOMINALI

TASSI NETTI ANNUI NEL DISCRETO

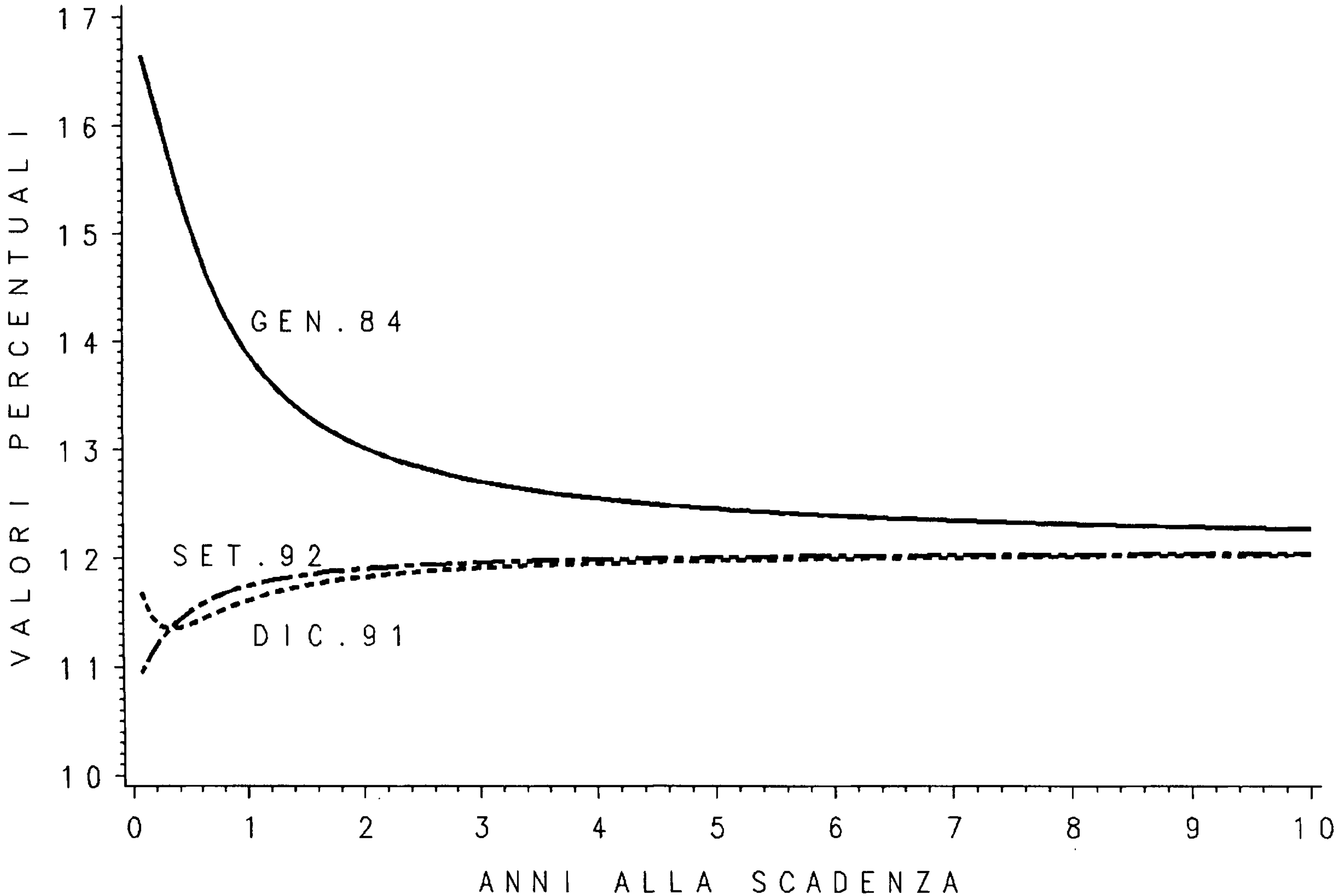


FIG. 9

STRUTTURE PER SCADENZA DELLA VOLATILITA' DEI TASSI REALI

VALORI IN RAGIONE D'ANNO

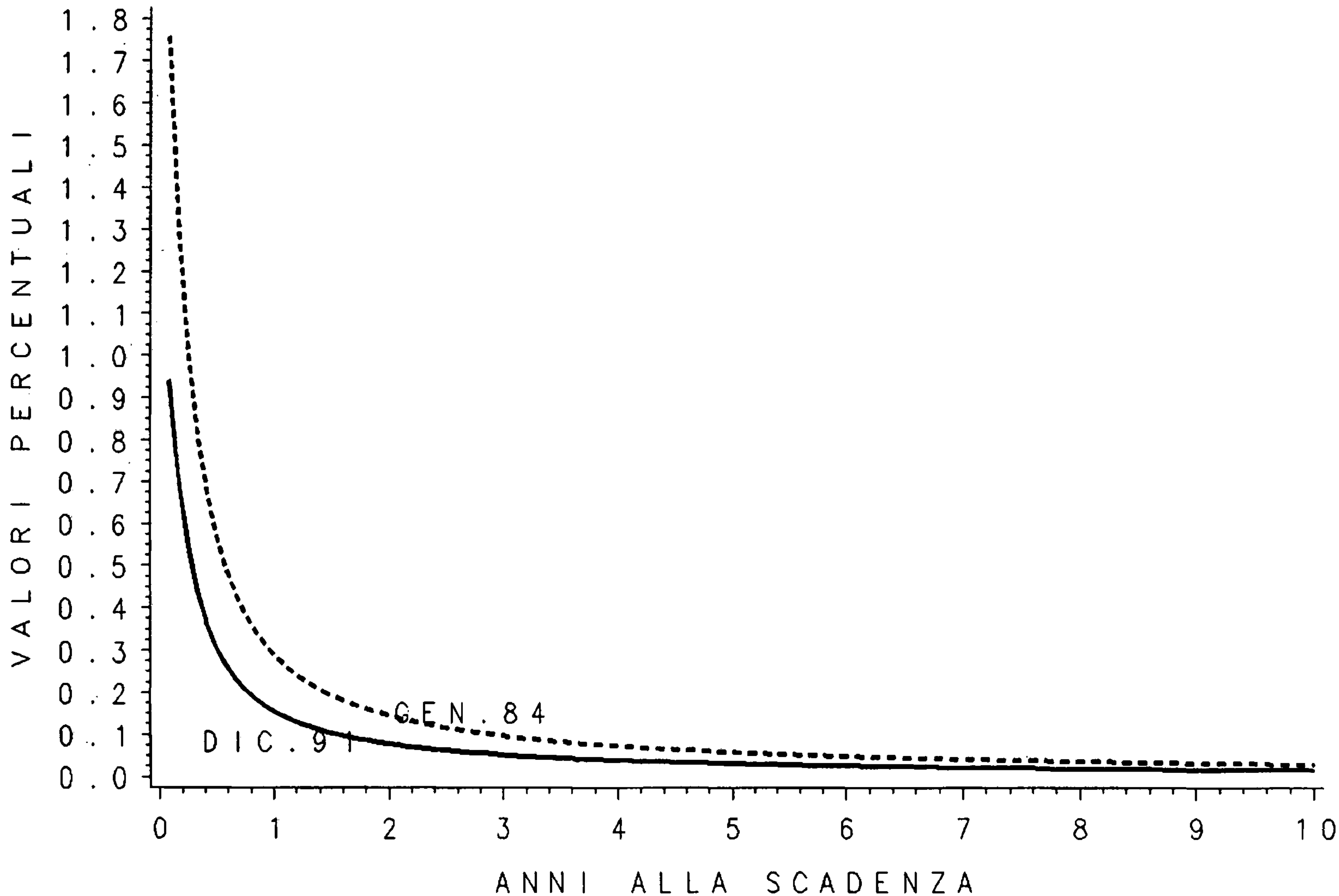


FIG. 10

STRUTTURE PER SCADENZA DELLA VOLATILITA' DEI TASSI D'INFLAZIONE

VALORI IN RAGIONE D'ANNO

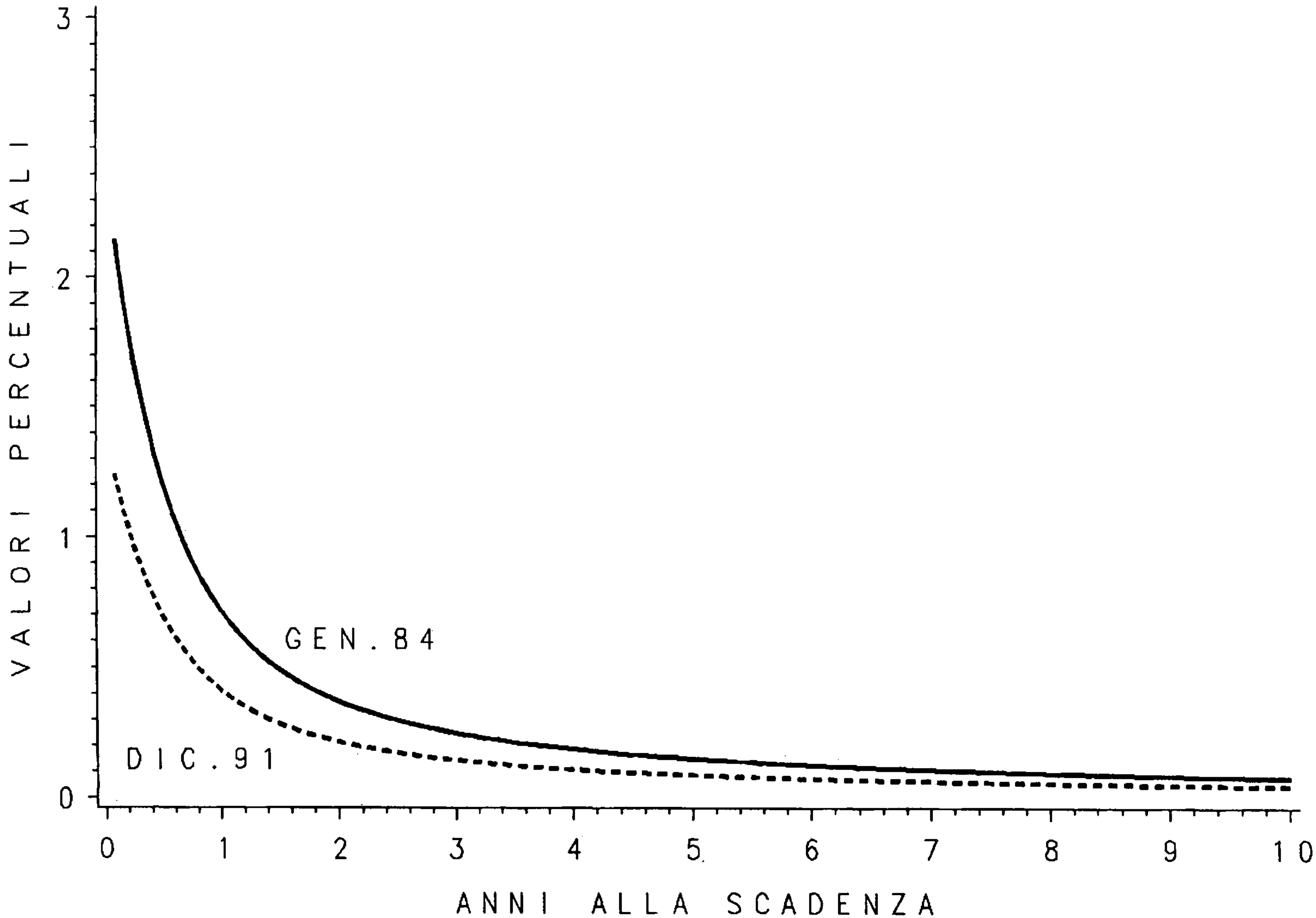
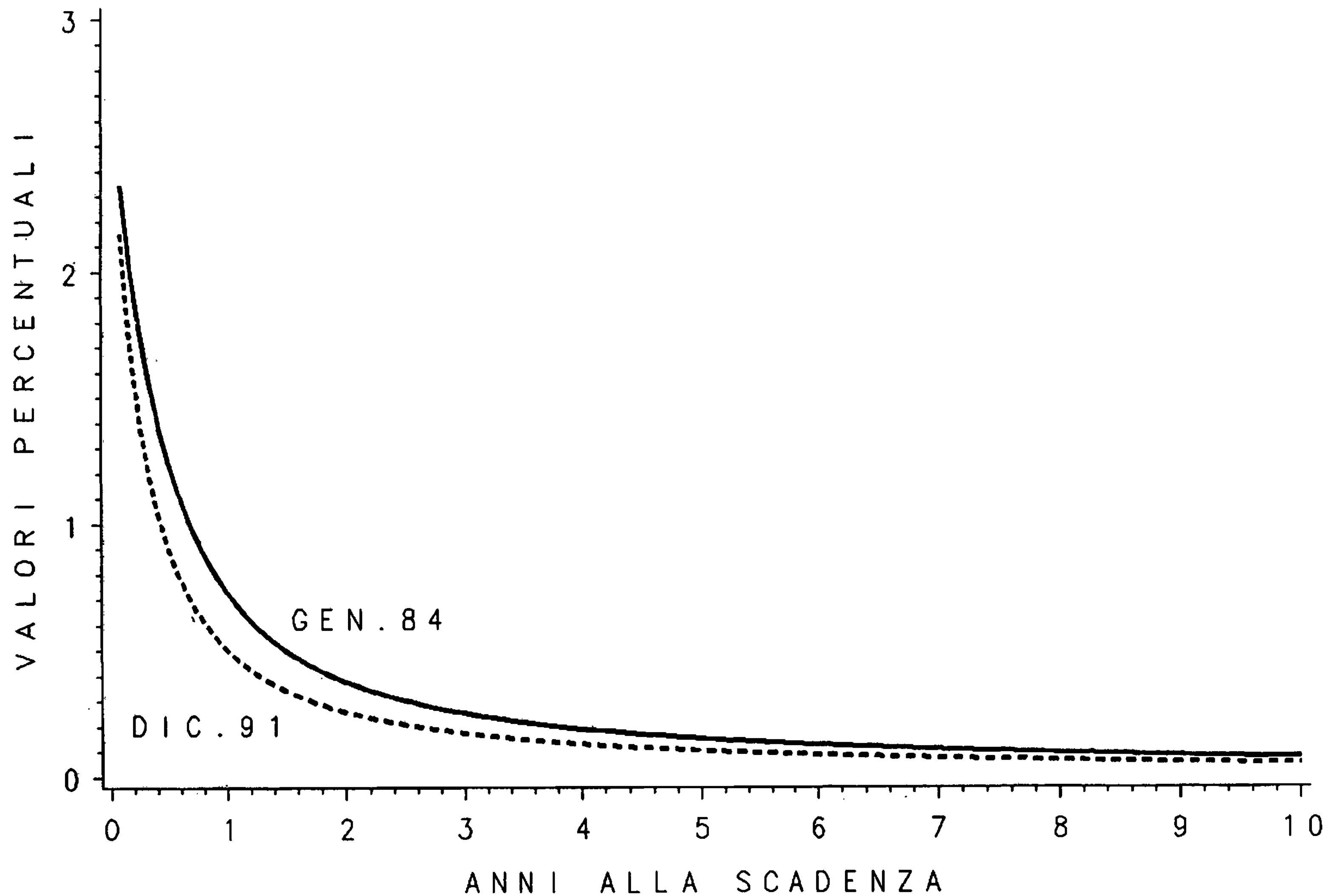


FIG. 11

STRUTTURE PER SCADENZA DELLA VOLATILITA' DEI TASSI NOMINALI

VALORI IN RAGIONE D'ANNO



BIBLIOGRAFIA

BAMBERG G. - SPREMANN K. (eds.) (1984), Risk and Capital, in "Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems", vol. 227, Berlin, Springer.

BANCA D'ITALIA (1983), Bollettino Economico, n. 1, ottobre.

____________(1990), Bollettino Economico, n. 14, febbraio.

BARONE E. - CESARI R. (1986), Rischio e rendimento dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile in un modello stocastico univariato, Roma, Banca d'Italia, "Temi di discussione", n. 73.

BARONE E. - CUOCO D. - ZAUTZIK, E. (1989), La struttura dei rendimenti per scadenza secondo il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica, Roma, Banca d'Italia, "Temi di discussione", n. 128.

BERGSTROM, A. R. (1984), Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time, in Griliches e Intriligator (eds.) (1984), vol. 2, cap.20.

BREALEY R. - SCHAEFER, S. (1977), Term structure with uncertain inflation, "Journal of Finance", 32, 2, 277-289.

BREEDEN, D. T. (1986), Consumption, production, inflation and interest rates. A synthesis, "Journal of Financial Economics", 16, 3-39.

BRENNAN M. J. - SCHWARTZ E. S., (1979), A continuous time approach to the pricing of bonds, "Journal of Banking and Finance", 3, 133-155.

BROWN R. H. - SCHAEFER S. M., (1988), The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll & Ross model, London Business School, mimeo.

BROWN S. J. - DYBVIG P. H. (1986), The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of interest rates, "Journal of Finance", 41, 3, 617-630.

CANTILLON, R. (1755), Essai sur la nature du commerce en général, ed. italiana a cura di S. Cotta e A. Giolitti, Torino, Einaudi, 1955.

CESARI, R. (1987), Risks and equilibrium prices of contingent claims with application to Italian securities, Oxford, D. Phil. thesis, trad. it. La struttura per scadenza dei tassi d'interesse ed i titoli derivati, Milano, Giuffrè, 1992.

__________ (1989), On the estimation of stochastic differential equations: the continuous-time maximum-likelihood approach, Roma, Banca d'Italia, "Temi di discussione", n. 125.

COX, J. C. - INGERSOLL, J. E. - ROSS, S. A. (1981), A Re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, "Journal of Finance", 36, 4, 769-799.

__________ (1985 a), An intertemporal general equilibrium model of asset prices, "Econometrica", 53, 2, 363-384.

__________ (1985 b), A theory of the term structure of interest rates, "Econometrica", 53, 2, 385-407.

DARBY, M. R. (1975), The financial and tax effects of monetary policy on interest rates, "Economic Inquiry", 13, June, 266-276.

DAY, T. E. (1985), Expected inflation and the real rate of interest. A note, "Journal of Banking and Finance", 9, 491-498.

DRUDI F. M. - PANETTA F. (1991), Rischio di tasso d'interesse e coefficienti patrimoniali degli intermediari finanziari: un'applicazione di modelli multifattoriali, Roma, Banca d'Italia, mimeo.

ESPOSITO, M. (1991), Il numero dei fattori (latenti) nel mercato telematico dei titoli di Stato, Milano, Banca Commerciale Italiana, Ufficio Studi e Programmazione, "Collana Ricerche", R91-8.

FAMA, E. F. (1975), Short-term interest rates as predictors of inflation, "American Economic Review", 65, June, 269-282.

__________ (1976), Inflation uncertainty and expected returns on Treasury Bills, "Journal of Political Economy", 84, 3, 427-448.

__________ (1977), Interest Rates and Inflation: the message in the entrails, "American Economic Review", 67, June, 487-496.

FELDSTEIN, M. (1976), Inflation, taxes and the rate of interest: A theoretical analysis, "American Economic Review", 66, Dec., 889-920.

FELLER, W. (1951), Two singular diffusion problems, "Annals of Mathematics", 54, 1, 173-182.

FISCHER E. O. - ZECHNER J. (1984), Diffusion process specifications for interest rates, in Bamberg e Spremann (eds.) (1984), 64-73.

FISCHER S. (1975), The demand for index bonds, "Journal of Political Economy", 83, 3, 509-534.

FISHER, I. (1896), Appreciation and Interest, "Publication of the American Economic Association", 3, 11, Aug., 331-442.

________ (1930), The Theory of Interest, New York, MacMillan.

GANDOLFO G. (1981), Qualitative Analysis and Econometric Estimation of Continuous Time Dynamic Models, Amsterdam, North-Holland.

GANI, J. - SARKADI, K. - VINCZE, I. (eds.) (1974), Progress in Statistics, Amsterdam, North-Holland, 2 voll.

GIBBONS M. R. - RAMASWAMY, K. (1986), The term structure of interest rates: empirical evidence, The Wharton School, mimeo.

GRILICHES, Z. - INTRILIGATOR, M. D. (eds.) (1984), Handbook of Econometrics, Amsterdam, North-Holland, 3 voll.

HICKS, J. R., (1939), Value and Capital, Oxford, Oxford University Press, 1946^2.

________ (1967), Critical Essays in Monetary Theory, Oxford, Oxford University Press.

________ (1970), Inflazione e interesse, "Bancaria", 6, 675-682.

HURWICZ, L. (1946), Theory of the firm and of investment, "Econometrica", 55, 1, 117-142.

ISTAT (1986), Annuario di contabilità nazionale, vol. 14, tomo 1.

KEYNES, J. M. (1930), A Treatise on Money, London, MacMillan, 2 voll.

LE BRETON, A. (1976), On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes, "Mathematical Programming Study", 5, 124-144.

LONG, J. B. (1974), Stock prices, inflation and the term structure of interest rates, "Journal of Financial Economics", 1, 131-170.

LONGSTAFF F. A. - SCHWARTZ E. S., (1991), Interest-rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model, "Journal of Finance", forthcoming.

LUTZ, F. A. (1974), Inflazione e tasso d'interesse, "Moneta e Credito", 267, 2, 105-123.

MARSH T. A. - ROSENFELD E. R. (1983), Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices, "Journal of Finance", 38, 2, 635-646.

MASERA, R. S. (1977), L'inflazione e la struttura per scadenza dei saggi di interesse: i vantaggi dell'adozione di tassi di interesse variabili nell'attuale situazione italiana, "Bancaria", 33, 6, 563-574.

McSHANE, E. J. (1983), Unified Integration, New York, Academic Press.

MONTICELLI, C. (1987), Inflazione, tasso di interesse reale e politica economica: una rassegna, "Rivista internazionale di scienze sociali", 95, 55-80.

MUNDELL, R. (1963), Inflation and real interest, "Journal of Political Economy", 71, June, 280-283.

MUTH, J. F. (1961), Rational expectations and the theory of price movements, "Econometrica", 29, July, 315-335.

NOVIKOV, A. A. (1972), Sequential estimation of the parameters of diffusion processes, "Mathematical Notes", 12, 812-818.

PHILLIPS, P. C. B. (1987), Time series regression with a unit root, "Econometrica", 55, 277-301.

PRAKASA-RAO, B. L. S. - RUBIN, H. (1981), Asymptotic theory of estimation in nonlinear stochastic differential equations, "Sankhyá", 43, Series A, Pt. 2, 170-189.

PONCET P. (1983), Optimum consumption and portfolio rules with money as an asset, "Journal of Banking and Finance", 7, 231-252.

RICHARD, S. F. (1978), An arbitrage model of the term structure of interest rates, "Journal of Financial Economics", 6, 33-57.

ROLL, R. (1973), Assets, money and commodity price inflation under uncertainty, "Journal of Money Credit and Banking", 5, 903-923.

ROSS, S. A. (1978), A simple approach to the valuation of risky streams, "Journal of Business", 51, 453-475.

ROVELLI, R. (1984), Expected inflation and the real interest rate: a survey of current issues, "Giornale degli economisti e Annali di economia", 43 (n. s.), 9-10, 671-697.

SARGENT, T. J. (1973), Interest rates and prices in the long run. A study of the Gibson paradox, "Journal of Money Credit and Banking", 385-449.

SHIRYAYEV, A. N. (1974), Statistics of diffusion processes, in Gani, Sarkadi e Vincze (eds.) (1974), 737-751.

STOCKMAN A. C. (1981), Anticipated inflation and the capital stock in a cash-in-advance economy, "Journal of Monetary Economics", 8, 387-393.

STULZ, R. M. (1986), Asset pricing and expected inflation, "Journal of Finance", 41, 1, 209-223.

TARASKIN, A. F. (1970), On the asymptotic normality of vector-valued stochastic integrals and estimates of drift parameters of a multidimensional diffusion process, trad. inglese di J. Malek in "Theoretical Probability and Mathematical Statistics", 2, 1974, 209-224.

THORNTON, H. (1802), An Enquiry into the Nature and Effects of the Paper Credit of Great Britain, London, Hatchard, riedizione a cura di F. A. Hayeck, London, Allen & Unwin, 1939 con appendice (1811); ed. italiana a cura di P. Ciocca e V. Sannucci, Torino, Cassa di Risparmio di Torino, 1990.

TOBIN, J. (1965), Money and economic growth, "Econometrica", 33, 4, Oct., 671-684.

VISCO, I. (1984), Price Expectations in Rising Inflation, Amsterdam, North-Holland.

__________ (1986), The use of Italian survey data in the analysis of the formation of inflation expectations, Roma, Banca d'Italia, "Temi di discussione", n. 75.

WICKSELL K., (1898), Interest and Prices, ed. 1965, New York, Kelley.

ELENCO DEI PIÙ RECENTI TEMI DI DISCUSSIONE (*)

n. 147 — *Diversification and Performance,* di M. BIANCO (gennaio 1991).

n. 148 — *Exchange Rate and Pricing Strategies in a Model of International Duopoly,* di P. CASELLI (gennaio 1991).

n. 149 — *Concorrenza e redditività nell'industria bancaria: un confronto internazionale,* di V. CONTI (febbraio 1991).

n. 150 — *Economie di scala e di diversificazione nel sistema bancario italiano,* di C. CONIGLIANI - R. DE BONIS - G. MOTTA - G. PARIGI (febbraio 1991).

n. 151 — *Politiche di offerta e riallocazione del credito bancario negli anni ottanta,* di C. GIANNINI - L. PAPI - A. PRATI (febbraio 1991).

n. 152 — *Stime regionali con pochi dati: analisi e simulazioni di stimatori alternativi per investimenti, occupazione e fatturato delle imprese manifatturiere,* di R. CESARI - L. F. SIGNORINI (marzo 1991).

n. 153 — *Dinamica retributiva e differenziali salariali,* di A. GAVOSTO - P. SESTITO (luglio 1991).

n. 154 — *Interessi reali, sistema impositivo ed effetto Sylos Labini,* di P. VAGLIASINDI (luglio 1991).

n. 155 — *Trasformazione delle scadenze e margine d'interesse degli istituti di credito mobiliare,* di P. SABBATINI (luglio 1991).

n. 156 — *Gli effetti della quotazione internazionale: il caso delle azioni italiane a Londra,* di F. PANETTA (agosto 1991).

n. 157 — *Grandi e piccole imprese negli anni ottanta: la ristrutturazione dell'industria in un'analisi di dati di bilancio,* di L. F. SIGNORINI (agosto 1991).

n. 158 — *Demand and Supply Shocks in Industrial Output,* di A. GAVOSTO - G. PELLEGRINI (novembre 1991).

n. 159 — *I* futures *e le opzioni sui titoli di Stato. Un'analisi del mercato e delle prospettive in Italia,* di A. SCALIA - L. TORNETTA (novembre 1991).

n. 160 — *Earnings Uncertainty and Precautionary Saving,* di L. GUISO - T. JAPPELLI - D. TERLIZZESE (febbraio 1992).

n. 161 — *Migrazioni in Europa: andamenti, prospettive, indicazioni di politica economica,* di G. GOMEL - S. REBECCHINI (febbraio 1992).

n. 162 — *Monetary Aggregates and Monetary Policy Coordination on the Way to Economic and Monetary Union: the Role of Cross-Border Deposits,* di P. GIUCCA - A. LEVY (febbraio 1992).

n. 163 — *Cross-Border Deposits and Monetary Aggregates in the Transition to EMU,* di I. ANGELONI - C. COTTARELLI - A. LEVY (marzo 1992).

n. 164 — *Young Households' Saving and the Life Cycle of Opportunities. Evidence from Japan and Italy,* di A. ANDO - L. GUISO - D. TERLIZZESE (marzo 1992).

n. 165 — *Bequests and Saving for Retirement. What Impels the Accumulation of Wealth?,* di F. BARCA - L. CANNARI - L. GUISO (marzo 1992).

n. 166 — *The Microeconomics and Macroeconomics of the Permanent Income Hypothesis,* di A. DEATON (marzo 1992).

n. 167 — *Why is Italy's Saving Rate so High?,* di L. GUISO - T. JAPPELLI - D. TERLIZZESE (aprile 1992).

n. 168 — *Waiting for EMU: Living with Monetary Policy Asymmetries in the EMS,* di L. BINI SMAGHI (aprile 1992).

n. 169 — *Income and Saving in Italy: a Reconstruction,* di G. MAROTTA - P. PAGLIANO - N. ROSSI (giugno 1992).

n. 170 — *Finance and Development: The Case of Southern Italy,* di R. FAINI - G. GALLI - C. GIANNINI (giugno 1992).

n. 171 — *Generational Accounting: The Case of Italy,* di D. FRANCO - J. GOKHALE - L. GUISO - L. J. KOTLIKOFF - N. SARTOR (giugno 1992).

n. 172 — *Mancate interviste e distorsione degli stimatori,* di L. CANNARI - G. D'ALESSIO (giugno 1992).

(*) I «Temi» possono essere richiesti a:
Banca d'Italia - Servizio Studi - Divisione Biblioteca e Pubblicazioni - Via Nazionale, 91 - 00184 Roma.

BANCA D'ITALIA - CENTRO STAMPA