

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

**La struttura dei rendimenti per scadenza secondo
il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica**

di E. Barone, D. Cuoco e Z. Zautzik



Numero 128 - Ottobre 1989

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

**La struttura dei rendimenti per scadenza secondo
il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica**

di E. Barone, D. Cuoco e Z. Zautzik

Numero 128 - Ottobre 1989

La serie «Temi di discussione» intende promuovere la circolazione, in versione provvisoria, di lavori prodotti all'interno della Banca d'Italia o presentati da economisti esterni nel corso di seminari presso l'Istituto, al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

I lavori pubblicati nella serie riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità dell'Istituto.

COMITATO DI REDAZIONE: *IGNAZIO ANGELONI, FRANCESCO M. FRASCA, LUIGI GUISO, STEFANO VONA; MARIA ANTONIETTA ORIO (segretaria).*

SOMMARIO

Il lavoro presenta una prima verifica empirica del modello di Cox, Ingersoll e Ross sulla base delle quotazioni dei BTP negoziati sul mercato secondario. Il modello è stato stimato giornalmente per il periodo dal 30 dicembre 1983 al 13 marzo 1989. Le risultanti strutture dei rendimenti per scadenza sono state poste a confronto con quelle ottenute mediante tecniche di interpolazione (metodo dei cubic splines). La stima giornaliera delle curve dei rendimenti ha consentito inoltre di analizzare retrospettivamente l'evoluzione dei corsi dei BTP, di coglierne i punti di svolta e di trarre utili indicazioni sul grado di efficienza del mercato secondario e sulla coerenza tra questo e il mercato primario.

INDICE

1. INTRODUZIONE	p. 5
2. IL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS	9
2.1 Descrizione del modello	10
2.2 Metodi di stima	11
3. RISULTATI	20
3.1 Dati utilizzati	20
3.2 Stima del modello CIR	
3.3 Confronto tra modello CIR e <u>cubic splines</u>	22
3.4 Valutazione delle condizioni di emissione dei titoli di Stato	41
4. CONCLUSIONI	42
APPENDICI	44
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	47

1. INTRODUZIONE

Le condizioni prevalenti in un dato istante sul mercato obbligazionario possono essere efficacemente sintetizzate dalla curva dei rendimenti per scadenza¹: in un mercato perfetto ed in assenza di imposte, le operazioni di arbitraggio assicurano che i prezzi dei titoli obbligazionari privi di rischio d'insolvenza siano pari al valore attuale dei pagamenti futuri (a titolo di interesse o di rimborso di capitale), ciascuno scontato al tasso appropriato (in funzione della data di pagamento).² In altri termini,

$$[1] \quad B(t, t_n) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-R(t, t_i)(t_i - t)} = \sum_{i=1}^n c_i P(t, t_i)$$

dove:

$B(t, t_n)$ è il prezzo al tempo t di un titolo con scadenza al tempo t_n

c_i è il pagamento corrisposto al tempo t_i ($t < t_i \leq t_n$)

$R(t, t_i)$ è il tasso d'interesse per la scadenza t_i

$P(t, t_i)$ è il prezzo di un titolo privo di cedole con scadenza al tempo t_i .

La curva dei rendimenti esprime la relazione esistente al tempo t tra i tassi di rendimento $R(t, T)$ di obbligazioni prive di cedole (zero coupon bonds) e la loro scadenza T . Essa può essere ottenuta come trasformazione della funzione che lega i prezzi $P(t, T)$ di pure discount bonds alla loro scadenza (discount

1. La struttura dei rendimenti per scadenza nel mercato obbligazionario italiano è stata originariamente analizzata da R. S. Maserà (1972).

2. In presenza di costi di transazione e di imposte, che possono incidere in misura differenziata sui diversi titoli e sui diversi detentori, esiste una molteplicità di curve dei rendimenti. Cfr. J. C. Dermody e E. Z. Prisman (1988).

function), dato che:

$$[2] \quad R(t,T) = -\ln[P(t,T)]/(T-t).$$

I problemi insiti nella stima della curva dei rendimenti dipendono dall'assenza nel nostro mercato di titoli di Stato privi di cedole, per le scadenze superiori all'anno, e dalla conseguente difficoltà di determinare, sulla base dei prezzi dei titoli con cedole, i fattori di sconto dei pagamenti che si situano oltre il breve termine:³ un titolo munito di cedole, infatti, rappresenta una pluralità di pagamenti corrisposti in periodi diversi.

Una semplice procedura consiste nell'assimilare i titoli con cedole a zero coupon bonds con scadenza pari alla loro durata finanziaria (duration).⁴ Sulla base di quest'approccio, la curva dei rendimenti (yield curve) viene quindi stimata tramite regressione dei rendimenti a scadenza dei titoli con cedole sulle loro duration. Questa impostazione è stata peraltro criticata sul piano teorico.⁵

In alternativa, si può utilizzare la relazione [1] per risalire dai prezzi dei titoli con cedole (B) a quelli dei titoli privi di cedole (P). Considerando il vettore b degli n prezzi osservati come variabile dipendente e la matrice C degli $(n \times m)$ pagamenti come variabile indipendente, è possibile utilizzare tecniche di regressione multipla applicate alla relazione

$$[3] \quad b = Cp + \epsilon$$

3. Poiché la [1] è lineare nei prezzi $P(t, t_0)$, risulta in genere preferibile utilizzare tale relazione per stimare la discount function, anziché direttamente la term structure.

4. Questa procedura è stata originariamente suggerita da Macaulay (1938).

5. Cfr. M. Livingston e J. Caks (1977).

per ottenere una stima del vettore p degli m coefficienti. L'errore ϵ nella [3] riflette la presenza di costi di transazione, l'imposizione fiscale, l'asincronia dei prezzi rilevati e le altre imperfezioni di mercato.

Per stimare la [3] attraverso le ordinarie tecniche di regressione occorre che il numero dei prezzi osservati (n) sia almeno pari a quello delle date di pagamento (m). Poiché in generale risulta $n < m$, si può ipotizzare che i pagamenti avvengano solo in corrispondenza di un insieme più limitato di date.⁶ Per evitare che i tassi a termine impliciti nella curva possano risultare negativi occorre inoltre imporre la condizione che i prezzi P siano monotonamente non crescenti in funzione della scadenza, risultando compresi tra 0 e 1.⁷ Questo tipo di approccio porta però ad una curva dei rendimenti discreta (anziché continua), la cui configurazione può risultare fortemente irregolare.

Una metodologia alternativa consiste nell'imporre la condizione che i prezzi dei pure discount bonds che compaiono nella [1] siano legati alle scadenze da una funzione continua. La forma di questa funzione può essere suggerita dai dati (approccio induttivo) o specificata a priori sulla base di un modello di equilibrio (approccio deduttivo).

Nell'ambito dell'approccio deduttivo, una completa specificazione, in un contesto di equilibrio generale, della struttura per scadenza dei prezzi delle obbligazioni prive di cedola è fornita dal modello sviluppato da Cox, Ingersoll e Ross

6. I singoli pagamenti sono in tal caso "spostati" ad una delle date appartenenti all'insieme predefinito utilizzando (ad esempio) il rendimento a scadenza del titolo.

7. L'imposizione di vincoli ai coefficienti nella forma di disuguaglianze lineari rende la regressione un problema di programmazione quadratica: cfr. W. R. Carleton e I. Cooper (1976).

(CIR)⁸. Nella formulazione più elementare, il modello CIR si basa sulle seguenti assunzioni: (1) il tasso d'interesse a breve termine si muove erraticamente intorno ad una traiettoria che lo guida verso il suo livello di equilibrio di lungo periodo e (2) i rendimenti attesi nel breve periodo dall'investimento in obbligazioni di qualsiasi scadenza sono pari al tasso d'interesse a breve maggiorato di un premio al rischio.

Il seguito del lavoro si articola in tre paragrafi. Il secondo paragrafo descrive il modello CIR. Nel terzo vengono confrontate le curve risultanti dal modello con quelle ottenute sulla base di un approccio di tipo induttivo, utilizzando una serie di interpolanti cubiche (cubic splines). In entrambi i casi, le stime dei parametri sono state effettuate sulla base dei prezzi dei BTP quotati sul mercato secondario (Borsa Valori di Milano e circuito telematico). Sulla base del modello CIR viene inoltre condotta una verifica retrospettiva delle condizioni di emissione dei BOT e dei BTP nel periodo in esame. Da queste analisi emergono alcune implicazioni sull'efficienza del mercato secondario e sulla coerenza tra questo e il mercato primario. Il paragrafo quarto riassume le principali conclusioni.

2. IL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS

2.1. Descrizione del modello

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross, nella sua formulazione ad un solo fattore, assume che:

- 1) il tasso d'interesse istantaneo (r) segua il processo descritto dall'equazione differenziale stocastica

$$[4] \quad dr = \kappa(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

8. Cfr. J. C. Cox, J. E. Ingersoll e S. A. Ross (1985a, b).

dove κ è la velocità di aggiustamento del tasso d'interesse r verso la sua media di lungo periodo μ , $\sigma\sqrt{r}$ è la volatilità che caratterizza le variazioni di r e dz è un processo di Wiener standardizzato; se risulta $0 < \kappa < 1$ il tasso istantaneo tende a convergere al suo valore medio μ (mean-reverting process);

- 2) il rendimento istantaneo atteso di obbligazioni di qualsiasi scadenza sia pari al tasso d'interesse r maggiorato di un premio al rischio (Local Expectations Hypothesis)

$$[5] \quad E[dB/B] = r + \lambda r B_r / B$$

dove $-\lambda$ è il prezzo di mercato del rischio e $r B_r / B$ rappresenta l'elasticità del prezzo (B) dell'obbligazione rispetto ad r ;

- 3) valgano le consuete ipotesi di mercati perfetti.

Date queste assunzioni, si può dimostrare che il valore $H=H(r,t,T)$ di una qualsiasi attività finanziaria che dipenda esclusivamente dalla corrente struttura dei rendimenti segue (nell'intervallo tra lo stacco di due cedole successive) l'equazione differenziale stocastica

$$[6] \quad \frac{1}{2} \sigma^2 r H_{rr} + [\kappa(\mu-r) - \lambda r] H_r + H_t - rH = 0.$$

Questa equazione può essere risolta una volta imposta l'appropriata boundary condition per $H(r,T,T)$, determinata dalle caratteristiche proprie di ogni singola attività finanziaria.

Per il prezzo $P(t,T)$ di un pure discount bond con vita residua $\tau=T-t$, la soluzione dell'equazione [6], soggetta alla boundary condition

$$[7] \quad P(T,T) = 1$$

è

$$[8] \quad P(t, T) = F(t, T)e^{-G(t, T)r}$$

dove

$$F(t, T) = \left[\frac{\phi_1 e^{\phi_2 \tau}}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \right]^{\phi_3}$$

e

$$G(t, T) = \left[\frac{(e^{\phi_1 \tau} - 1)}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \right].$$

La [8] esprime il valore di un pure discount bond di durata τ in funzione della variabile di stato r e dei tre parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , dove:

$$[9] \quad \phi_1 = \sqrt{[(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2]}$$

$$[10] \quad \phi_2 = (\kappa + \lambda + \phi_1)/2$$

$$[11] \quad \phi_3 = 2\kappa\mu/\sigma^2.$$

Dalla [8] è possibile derivare, utilizzando la [2], l'intera struttura dei rendimenti $R(t, T)$. In particolare si ha:

$$[12] \quad \lim_{T \rightarrow 0} R(t, T) = r$$

$$[13] \quad \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = (\phi_1 - \phi_2)\phi_3.$$

Il parametro σ della [4] può essere determinato attraverso la relazione:

$$[14] \quad \sigma = \sqrt{2(\phi_1\phi_2 - \phi_2^2)}.$$

In questo modello, il rischio base relativo di un discount bond, ossia la variazione proporzionale del prezzo determinata da una variazione infinitesima del tasso d'interesse istantaneo (cambiata di segno), risulta dalla [8] pari a:

$$[15] \quad -P_r/P = G(\tau)$$

Il rischio base di un titolo provvisto di cedole è quindi pari alla media ponderata dei rischi base dei discount bond con scadenza alle diverse date di pagamento, prendendo come pesi i valori attuali dei pagamenti:

$$[16] \quad -B_r/B = \frac{-\Sigma cP_r}{\Sigma cP} = \frac{\Sigma cPG(\tau)}{\Sigma cP}$$

Questa misura di rischio per i titoli con cedole può essere espressa in unità di tempo; in tal caso, essa è stata chiamata da Cox, Ingersoll e Ross (1979) "stochastic duration". La durata stocastica (τ) di un titolo con cedole è pari alla scadenza del discount bond con uguale grado di rischio:

$$[17] \quad \tau = G^{-1} [B_r/B] = \frac{1}{\phi_1} \ln \left[1 - \frac{B_r/B\phi_1}{1+B_r/B\phi_2} \right]$$

2.2. Metodi di stima

I parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 del modello e la variabile di stato r possono essere stimati applicando una procedura di regressione non lineare o il metodo generalizzato dei momenti alla [3]. Tuttavia, il metodo dei momenti risulta di difficile applicazione per il caso di titoli provvisti di cedole. Pertanto, nell'analisi successiva, i parametri del modello CIR sono stati ottenuti

mediante regressione non lineare (metodo di Marquardt).⁹

Nello stimare il modello, si è assunto che i residui della [2] siano indipendenti tra loro e normalmente distribuiti, con media zero e varianza proporzionale alle derivate dei prezzi dei titoli rispetto ai rendimenti a scadenza (ossia ai prodotti tra le duration e i rispettivi corsi tel quel). Appare infatti logico attendersi che gli errori nei prezzi dei titoli con scadenza molto ravvicinata abbiano un ordine di grandezza inferiore a quelli dei titoli a lunga scadenza. Pertanto, le stime dei coefficienti sono state effettuate con i minimi quadrati generalizzati, dividendo entrambi i membri della equazione [2] per la radice quadrata delle derivate.

Si è inoltre adottata la seguente procedura iterativa per escludere eventuali outliers: se alcune osservazioni presentano residui maggiori in valore assoluto di 2,57 volte la loro deviazione standard (corrispondente ad una probabilità dello 0,01), l'osservazione con il residuo standardizzato più elevato in valore assoluto è esclusa e la regressione è nuovamente stimata; la procedura viene ripetuta fino ad eliminare tutti gli outliers.

Nelle ipotesi alla base del modello, i parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono costanti. Potrebbe pertanto apparire inefficiente o incoerente stimare questi parametri da successive cross-sections senza imporre vincoli intertemporali sulle stime. La stessa argomentazione si applica al parametro σ espresso dalla [14].

9. Per la stima mediante regressione non lineare cfr. S. Brown - P. Dybvig (1986) e R. Brown - S. Schaefer (1988). Per la stima con il metodo dei momenti cfr. M. Gibbons - K. Ramaswamy (1986). Un approccio alternativo (detto a due stadi) consiste nello stimare dapprima i parametri κ , μ e σ del processo [4] seguito dal tasso d'interesse istantaneo, utilizzando la serie storica di un tasso a breve, e quindi λ sulla base della [3]: cfr. A. Ananthanarayanan e E. Schwartz (1980). Per un'applicazione al mercato italiano dell'approccio a due stadi cfr. E. Barone e R. Cesari (1986).

Nelle nostre stime non si è imposto alcun vincolo ai parametri stimati. La costanza dei parametri del modello implica infatti che il rendimento di uno zero coupon bond a lungo termine sia costante. Questa ipotesi appare appropriata per la curva dei rendimenti reali, non per quelli nominali. Inoltre il comportamento della serie temporale dei parametri del modello, in particolare la varianza implicita, assume interesse autonomo.¹⁰

3. RISULTATI

3.1. Dati utilizzati

Per la stima della struttura dei rendimenti per scadenza sono state utilizzate le quotazioni giornaliere dei BTP negoziati alla Borsa Valori di Milano e sul mercato telematico dal 30 dicembre 1983 al 13 marzo 1989.¹¹ Per i titoli quotati su entrambi i mercati si è utilizzata la quotazione del telematico, ricorrendo, in assenza di contrattazioni per un determinato titolo, alla media tra le migliori quotazioni denaro e lettera

10. R. H. Brown e S. M. Schaefer (1988) sottolineano l'analogia tra questo tipo di approccio ed il calcolo, sulla base della formula di Black e Scholes, della volatilità implicita (ISD) nel prezzo delle opzioni. "Strictly speaking, intertemporal variation in the ISD will be almost always inconsistent with the model. Moreover, to extent that actual volatility changes over time, the assumptions of the Black-Scholes model are often violated. Nonetheless, the model is found to explain the cross-sectional structure of option prices well, and ISD's are found to be good predictors of volatility".

11. I BTP vengono negoziati "a contante", ossia con liquidazione terzo giorno non festivo successivo a quello della stipulazione. In base agli usi, essi vengono quotati al corso secco: i corsi comprensivi degli interessi maturati (corsi tel quel) vengono ottenuti sommando ai corsi secchi la quota della cedola corrente, al netto dell'eventuale ritenuta fiscale, maturata (in regime di interesse semplice e sulla base dell'anno commerciale) nel periodo compreso tra la data di inizio godimento e quella di regolamento (entrambe incluse).

rilevate alle ore 16. I titoli negoziati, che all'inizio del periodo in esame erano 7 per un valore nominale di 15.890 miliardi, erano pari a 47 alla fine del 1988, per un valore nominale di 112.527 miliardi (tav. 1).¹²

L'introduzione della ritenuta fiscale sugli interessi dei titoli di Stato, avvenuta nel settembre 1986, costituisce un elemento di complicazione: poiché i calcoli di convenienza delle persone giuridiche tendono a basarsi sul rendimento lordo e quelli delle persone fisiche sul rendimento netto, è possibile stabilire a priori che il "vero" tasso di equilibrio del mercato si colloca in posizione intermedia, ma non è possibile determinarlo con precisione.

E' stata fatta, di conseguenza, la scelta di utilizzare i tassi netti nell'esposizione che segue, alla luce del fatto che la quota più rilevante dei titoli di Stato in circolazione è detenuta dalle famiglie: può essere quindi lecito ipotizzare che il tasso di equilibrio sia più direttamente approssimato dal rendimento netto.

3.2. Stima del modello CIR

Il modello CIR è stato stimato su base giornaliera per il periodo dal 30 gennaio 1983 al 13 marzo 1989.

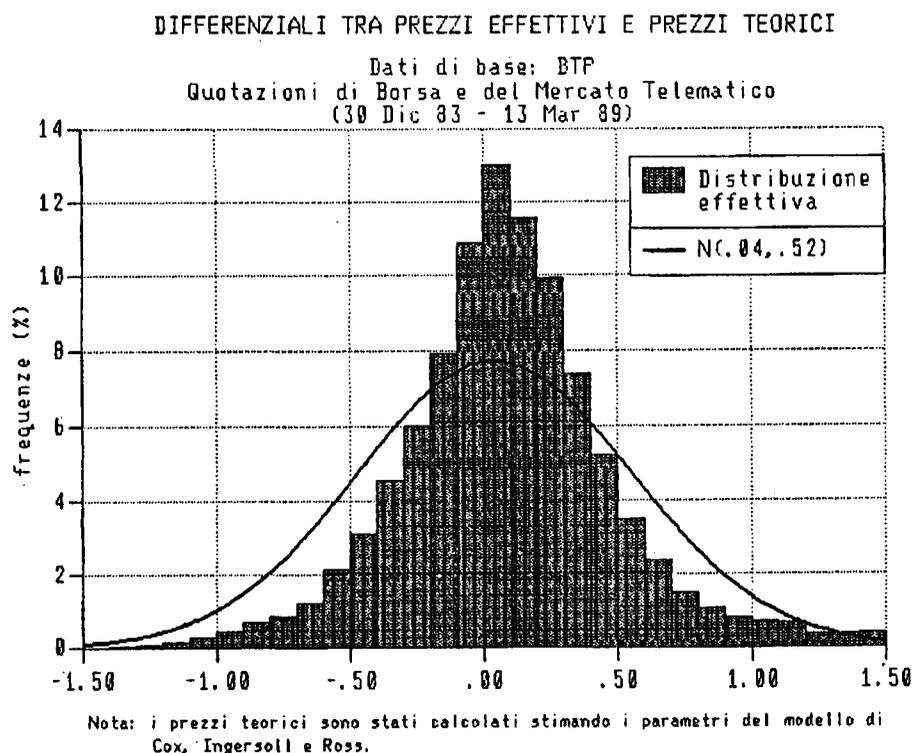
Alcune statistiche relative alla serie storica dei parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono riportate nella tavola 2. La stabilità delle stime cresce negli anni più recenti (con la significativa eccezione del 1987), nei quali i titoli osservati sono più numerosi.

La figura 1 mostra la distribuzione dei differenziali tra

12. Le tavole sono riportate nell'Appendice B.

prezzi effettivi e prezzi teorici per l'intero campione (26.058 osservazioni) e la distribuzione normale con media e varianza pari a quelle campionarie. La media della distribuzione risulta pari a 0,04, non significativamente diversa da zero (il rapporto t è pari a 0,07). Nel 25 per cento dei casi il valore assoluto dei differenziali risulta inferiore a 0,10 e nell'80 per cento dei casi inferiore a 0,50. La varianza dei prezzi osservata è quasi interamente spiegata dal modello ($R^2 \approx 1$).

Fig. 1



In generale, i differenziali, relativamente più contenuti per le scadenze brevi, tendono ad ampliarsi per le scadenze più lunghe.¹³ L'esistenza di lievi discrepanze per le scadenze meno lunghe può essere giustificata dalla presenza di costi di transazione, che rendono non convenienti arbitraggi su differenze

13. Queste risultanze empiriche confermano la specificazione adottata per il vettore dei residui e nella stima dei parametri del modello (cfr. § 2.2).

di prezzo relativamente contenute. L'ampio divario talora rilevato per i corsi dei titoli con più lunga durata può essere invece collegato alla presenza di titoli e operatori con diverso regime fiscale.¹⁴

Il modello fornisce prezzi teorici in media molto vicini a quelli di mercato. Tuttavia, dato il metodo di stima dei parametri, questo risultato non è sufficiente ad assicurare che il modello abbia un contenuto economico e che la procedura adottata non sia semplicemente un metodo sofisticato di interpolazione dei dati. Ulteriori test devono pertanto essere diretti ad accertare la coerenza dei valori stimati per le variabili aventi contenuto economico.

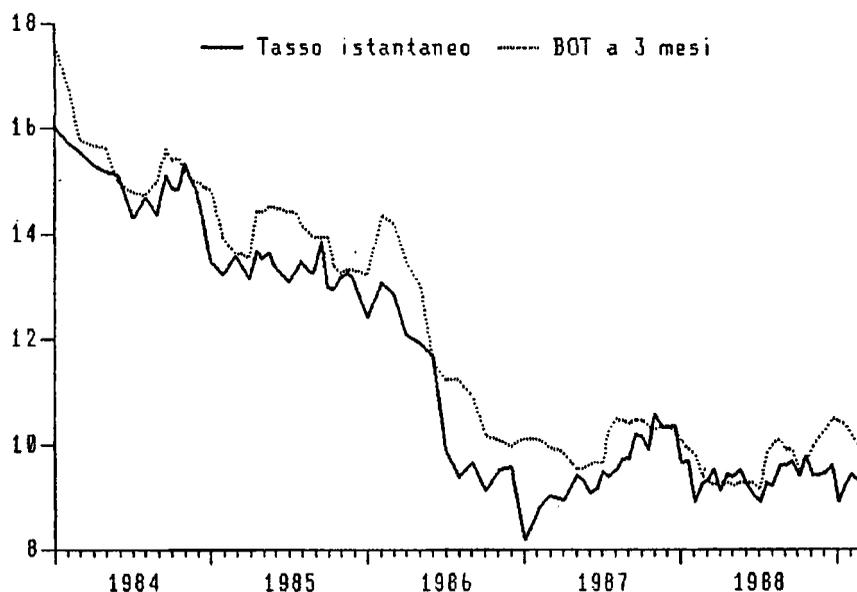
La tavola 3 riporta alcune statistiche descrittive per la serie stimata della variabile di stato r (tasso d'interesse istantaneo) e del tasso asintotico a lungo termine ottenuto dalla [13]. I coefficienti di correlazione tra il tasso istantaneo ed alcuni tassi di mercato monetario interni ed esteri sono riportati nella tavola 4; la correlazione risulta particolarmente elevata (0,98) nel caso dei BOT a 3 mesi. La figura 2 mostra l'andamento comparato del tasso istantaneo e del rendimento netto dei BOT a 3 mesi.

Il comportamento del modello non sembra dare risultati incongruenti con le informazioni già note. In particolare, il tasso a breve è in netta diminuzione tra il 1984 e il 1986 e mediamente stabile dalla fine di quell'anno. Il tasso a lungo termine presenta una più ampia variabilità, soprattutto negli anni più lontani; è comunque possibile discernere una sua rapida

14. Il mercato mostra una leggera tendenza (statisticamente non significativa) a sopravvalutare i titoli con ritenuta fiscale del 6,25 per cento e a sottovalutare quelli con ritenuta del 12,50 per cento: il differenziale medio è pari a 0,18 nel primo caso e a -0,12 nel secondo. Questo risultato potrebbe essere collegato al problema della corretta individuazione del rendimento (netto o lordo) significativo: cfr. nota 2.

Fig. 2

TASSO D'INTERESSE ISTANTANEO E RENDIMENTO NETTO DEI BOT A 3 MESI
(Dati di base: BTP quotati in Borsa e sul mercato telematico)



Nota: il tasso istantaneo è stato ottenuto stimando i parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross.

riduzione fino alla metà del 1985 e un lieve trend ascendente, pur interrotto da sensibili oscillazioni nei due sensi, dalla fine del 1985 in poi (fig. 3).

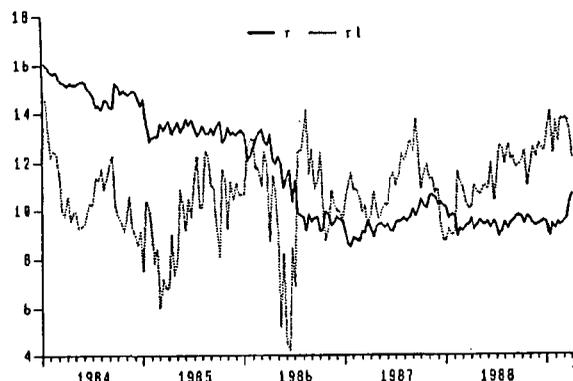
Alla metà del 1986 il tasso a lunga supera quello a breve e cambia, quindi, l'inclinazione della curva dei rendimenti, che era rimasta fino ad allora negativa, in coerenza con le prevalenti attese di ulteriore riduzione dei tassi (fig. 4). Il cambiamento è molto netto e avviene, secondo le risultanze giornaliere, nell'ultima settimana di giugno.¹⁵

15. Ciò concorda pienamente con la percezione di quel periodo, riportata nella Relazione Annuale della Banca d'Italia sul 1986: "Dall'estate, il controllo monetario si è fatto più difficoltoso a causa della discontinuità della domanda di titoli di Stato da parte del mercato, connessa con l'indebolirsi delle aspettative di ulteriori riduzioni dei tassi. Il fenomeno è risultato particolarmente evidente in luglio...".

Fig. 3

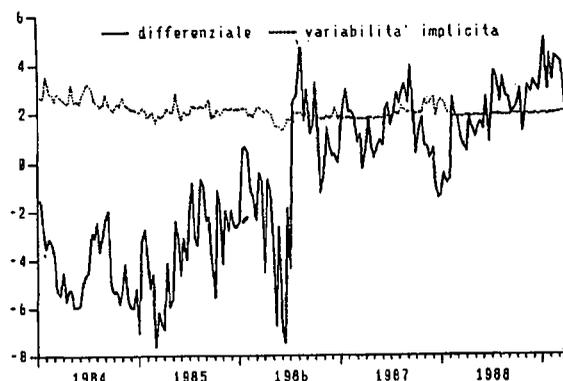
Fig. 4

TASSO D'INTERESSE ISTANTANEO E TASSO ASINTOTICO A LUNGO TERMINE
(Dati di base: BTP quotati in Borsa e sul mercato telematico)



Nota: il tasso istantaneo (r) e il tasso asintotico a lungo termine sono stati ottenuti stimando i parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross.

DIFFERENZIALE TRA TASSO ASINTOTICO A LUNGO TERMINE E TASSO ISTANTANEO
E VARIABILITA' IMPLICITA' DEL TASSO ISTANTANEO
(Dati di base: BTP quotati in Borsa e sul mercato telematico)



Nota: il tasso istantaneo, il tasso asintotico a lungo termine e la variabilita' implicita sono stati ottenuti stimando i parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross.

Ulteriori indicazioni circa l'attendibilità del modello possono ottenersi dall'esame della variabilità del tasso d'interesse istantaneo implicita nelle curve dei rendimenti stimate ($\sigma\sqrt{r}$).¹⁶

La tavola 5 riporta alcune statistiche descrittive della serie storica relativa alla variabilità implicita. A partire dal 1987, i valori risultano estremamente simili a quelli calcolati sulla serie temporale del tasso istantaneo (tav. 3), e questo costituisce un notevole test del modello CIR, considerando che la variabilità implicita è determinata sulla base di una cross-section di titoli.

La variabilità implicita risulta abbastanza instabile e decrescente (dall'8 al 5 per cento circa) tra il 1984 e il 1985, generalmente più stabile e lievemente ascendente in seguito (fig. 4). La maggiore stabilità del parametro può riflettere in parte il graduale sviluppo del mercato dei titoli negli ultimi anni.

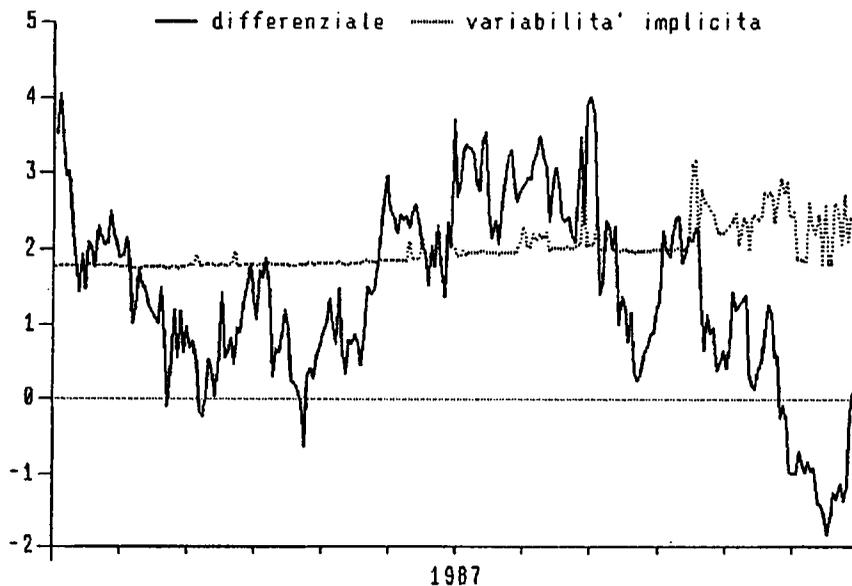
E' interessante notare che il periodo di sensibile aumento

16. La variabilità del tasso istantaneo è definita come deviazione standard delle variazioni assolute: cfr. [4].

della volatilità tra la metà di ottobre del 1987 e l'inizio del 1988, unica eccezione prolungata nella recente fase di stabilità, coincide con il periodo di crisi dei mercati finanziari mondiali apertosi nella seconda metà di ottobre, anticipandolo lievemente. Secondo le stime relative a quell'anno, riportate in maggior dettaglio nella figura 5, la volatilità passa dal 2,0 al 3,1 per cento (valore massimo negli ultimi quattro anni) il 14 e 15 ottobre, per poi ridiscendere a livelli relativamente più normali il giorno 16; il momento di massima crisi dei mercati avvenne il successivo 19.

Fig. 5

DIFFERENZIALE TRA TASSO ASINTOTICO A LUNGO TERMINE E TASSO ISTANTANEO
E VARIABILITÀ IMPLICITA' DEL TASSO ISTANTANEO
(Dati di base: BTP quotati in Borsa e sul mercato telematico)

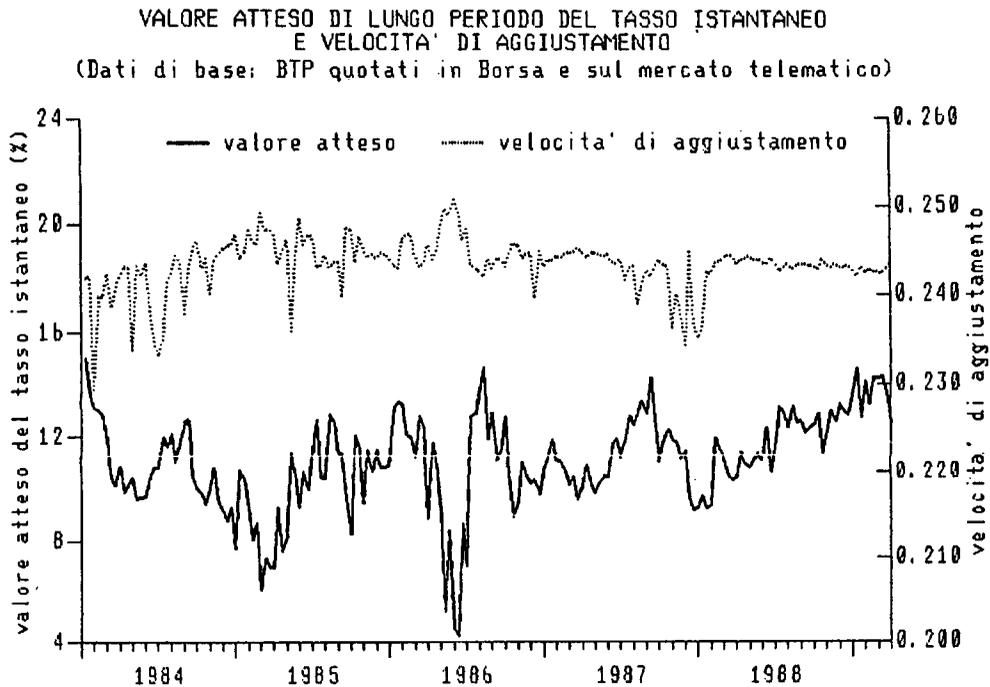


Nota: il tasso istantaneo, il tasso asintotico a lungo termine e la variabilità implicita sono stati ottenuti stimando i parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross.

Infine, ipotizzando un premio al rischio nullo ($\lambda=0$), è possibile ricavare anche i parametri κ e μ del processo [4] da ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . La velocità di aggiustamento κ risulta in media pari a 0,24, con una deviazione standard pari a 0,003. Il valore atteso di lungo periodo del tasso istantaneo risulta in media pari all'11,13 per cento, con una deviazione standard pari a 1,802 (tavola 6). La figura 6 mostra l'evoluzione temporale dei

due parametri nel periodo in esame.

Fig. 6



Nota: il valore atteso di lungo periodo del tasso istantaneo e la velocita' di aggiustamento sono stati ottenuti nell'ipotesi di un premio al rischio nullo.

3.2. Confronto tra modello CIR e cubic splines

Per verificare ulteriormente la capacità del modello CIR di descrivere adeguatamente le condizioni prevalenti sul mercato, i precedenti risultati sono stati confrontati con quelli ottenibili mediante un approccio di tipo induttivo. A tal fine, la curva dei rendimenti per scadenza è stata stimata mediante tecniche di regressione basate sull'uso dei cubic splines: questo metodo, che si basa sull'interpolazione mediante una serie di polinomiali di terzo grado, consente di lasciare un notevole grado di libertà alle forme funzionali che la curva dei rendimenti può assumere e fornisce quindi un buon test della validità delle restrizioni imposte dal modello CIR sulla forma della curva stessa.¹⁷

17. Per una descrizione del metodo dei cubic splines si veda l'Appendice A.

Le figg. 7 e 8 riportano le curve dei rendimenti stimate con il metodo dei cubic splines e con il modello CIR sulla base dei prezzi rilevati il 10 marzo 1989 (con valuta 15 marzo) per i 49 BTP quotati. Nelle due figure sono stati riportati per confronto anche i rendimenti dei BOT emessi il 15 marzo.

Fig. 7

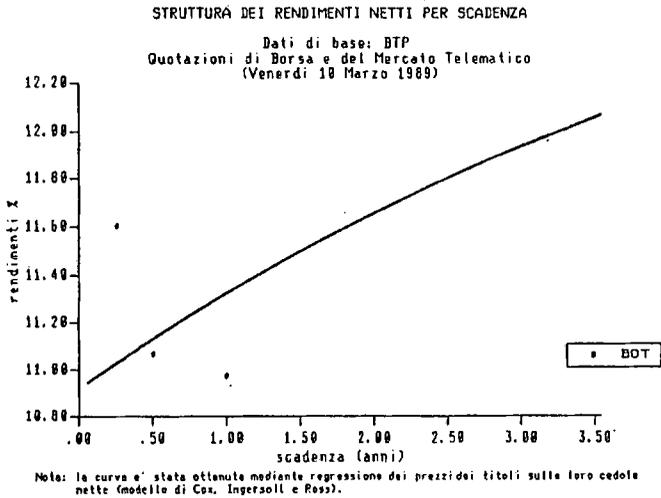
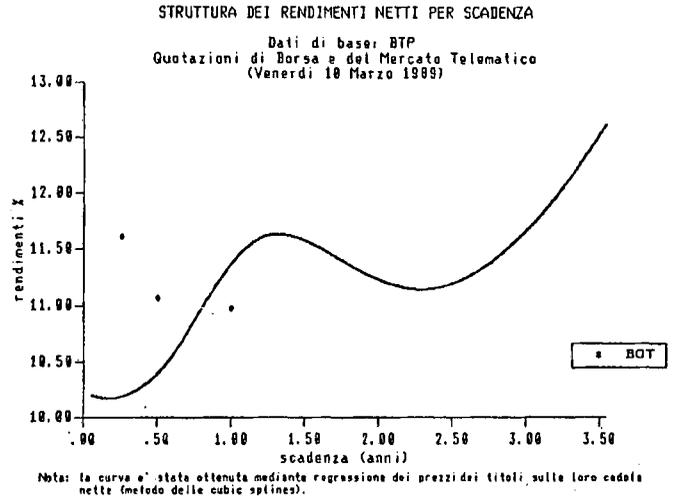


Fig. 8



La curva ottenuta con gli splines risulta caratterizzata da una forma relativamente più complessa. Nondimeno, si può rilevare dalle figg. 9 e 10 e dalle tavv. 8 e 9 che i differenziali tra i prezzi di mercato dei BTP quotati sul mercato secondario e i loro valori teorici ottenuti (tramite la [1]) sulla base delle curve stimate risultano in entrambi i casi molto contenuti.¹⁸

Inoltre, la curva ottenuta mediante gli splines presenta un'inclinazione fortemente positiva nel segmento relativo alle scadenze superiori a due anni. Questo si riflette in tassi a termine impliciti notevolmente erratici (fig. 12 e tav. 11). Più in generale, le curve ottenute con gli splines sono caratterizzate da una forte variabilità nel segmento a più lungo

¹⁸. $L'R^2$ della regressione risulta in entrambi i casi non distinguibile da 1, e non fornisce quindi alcun criterio di selezione tra le due metodologie.

Fig. 9

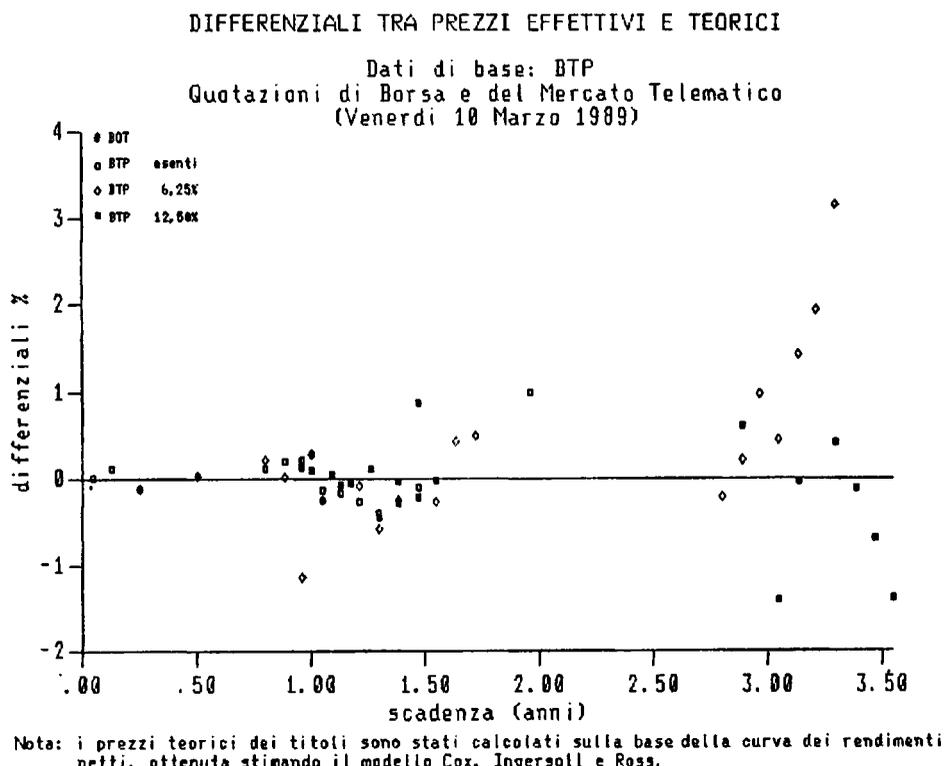
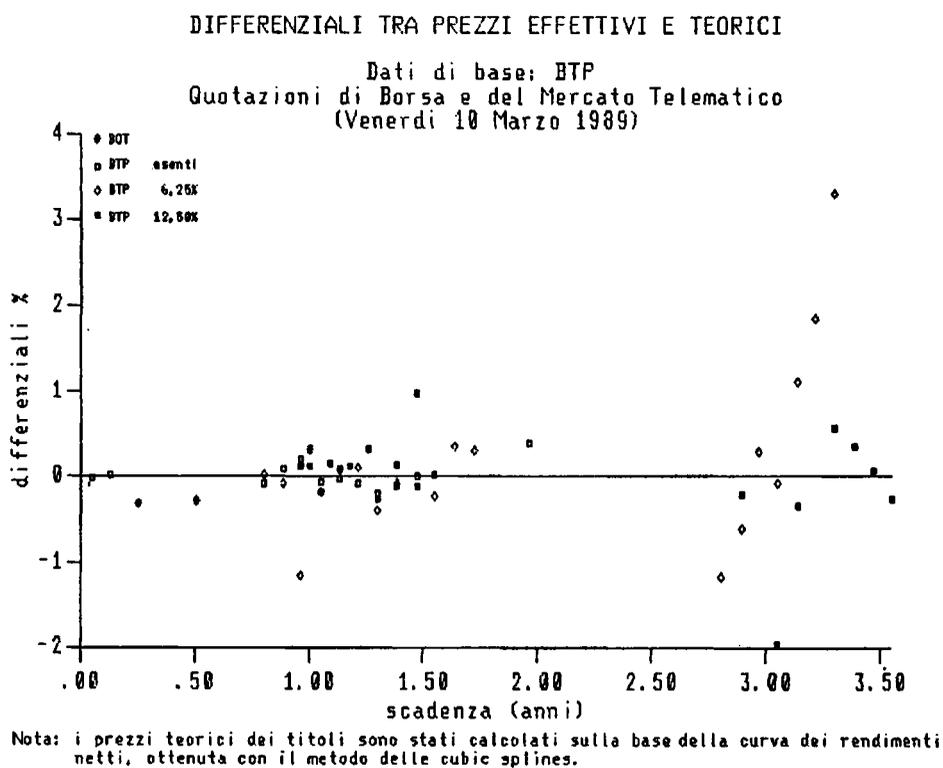


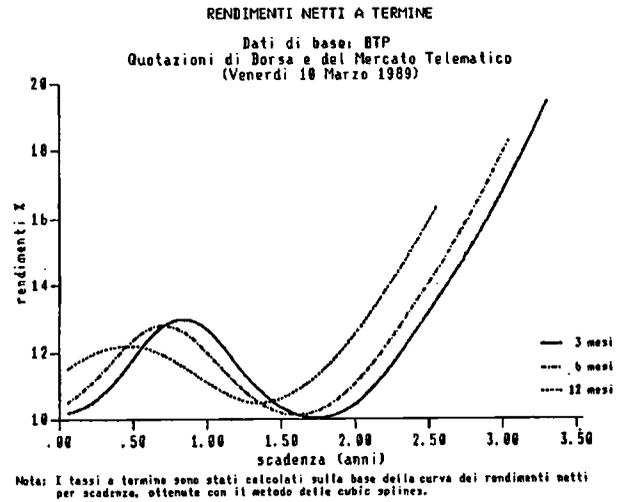
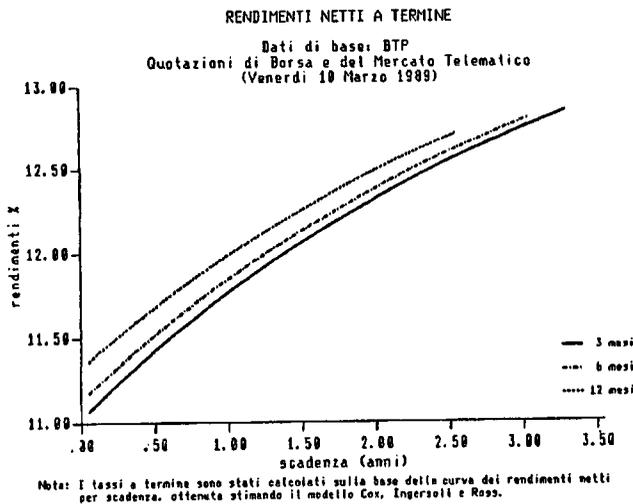
Fig. 10



termine. I rendimenti a termine impliciti nella curva stimata sulla base del modello CIR presentano invece un'evoluzione molto più graduale (fig. 11 e tav. 10). Tale curva, essendo ottenuta sulla base di un modello generale di equilibrio, si presta inoltre ad essere estrapolata.

Fig. 11

Fig. 12

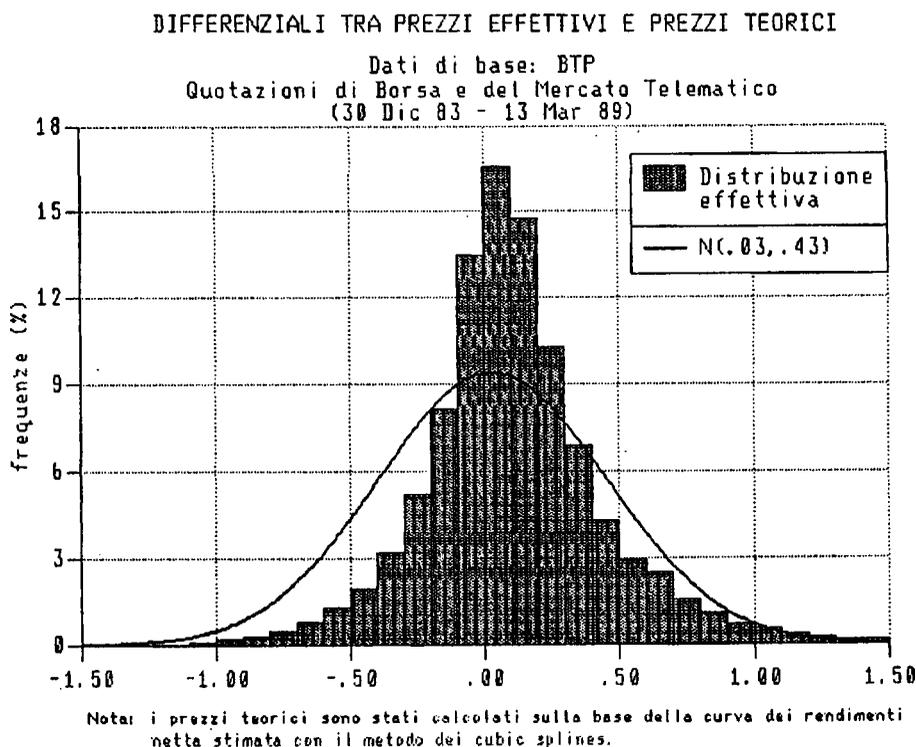


Nell'intero periodo esaminato, i differenziali tra prezzi effettivi e prezzi teorici calcolati con il metodo dei cubic splines appaiono solo lievemente più contenuti di quelli rilevati stimando il modello CIR: nel 31 per cento dei casi il valore assoluto dei differenziali risulta inferiore a 0,10 e nell'86 per cento dei casi inferiore a 0,50 (fig. 13). Peraltro, la configurazione della curva dei rendimenti ottenuta con gli splines è generalmente meno stabile, come risulta dalla tavola 7 che pone a confronto la variabilità delle stime giornaliere dei rendimenti fornite dai due diversi metodi.

3.4. Valutazione delle condizioni di emissione dei titoli di Stato

Poiché il modello CIR è in grado di determinare, su base giornaliera, il prezzo teorico per titoli di qualsiasi scadenza,

Fig. 13



un'immediata applicazione consiste nel trarre informazioni sulla coerenza tra le condizioni di emissione di BOT e BTP, da un lato, e la struttura dei rendimenti sul mercato secondario, dall'altro.¹⁹

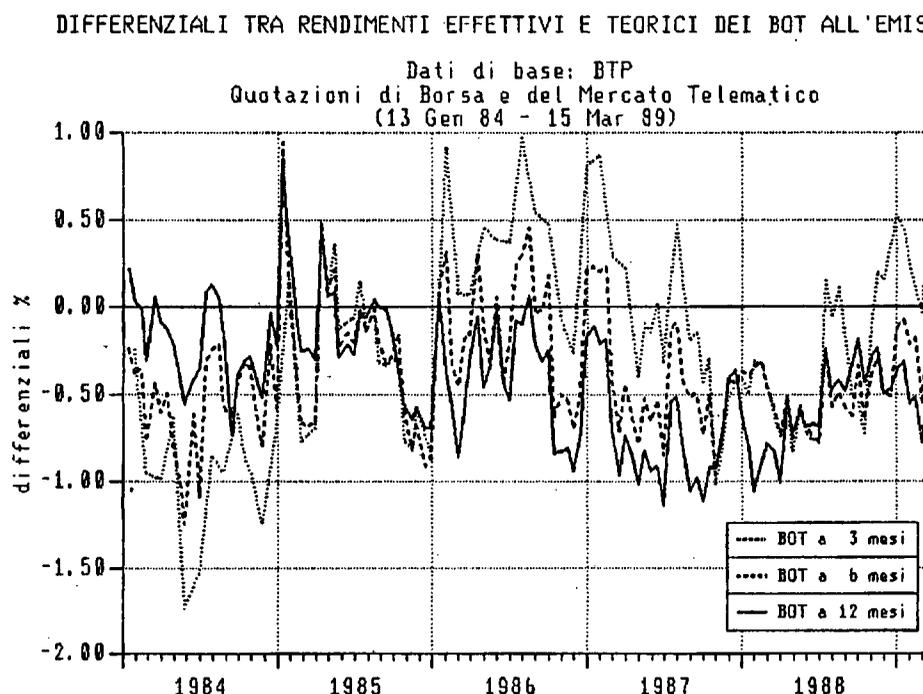
I rendimenti medi di aggiudicazione dei BOT nelle aste degli ultimi cinque anni sono stati messi a confronto con le stime fornite dal modello per le medesime scadenze; la data di valuta di ogni stima coincide con la data di regolamento delle sottoscrizioni fissata per l'asta corrispondente. I risultati sono esposti nella figura 14.

Dall'esame appare possibile dedurre che, almeno dal 1986 a oggi, le condizioni di tasso risultanti dalle aste sono state mediamente meno favorevoli di quelle stimate dal modello per le

19. Per un'applicazione del modello CIR alla valutazione dei CTO si veda E. Barone e D. Cuoco (1989).

corrispondenti scadenze. L'entità della discrepanza, inoltre, appare direttamente correlata con la durata dei titoli: essa risulta più contenuta, e in alcuni periodi favorevole alla sottoscrizione in asta, per i BOT trimestrali; per i BOT annuali essa è sensibilmente più ampia e in pratica sempre sfavorevole nei confronti dei sottoscrittori sul mercato primario; i BOT semestrali si collocano in posizione intermedia.

Fig. 14

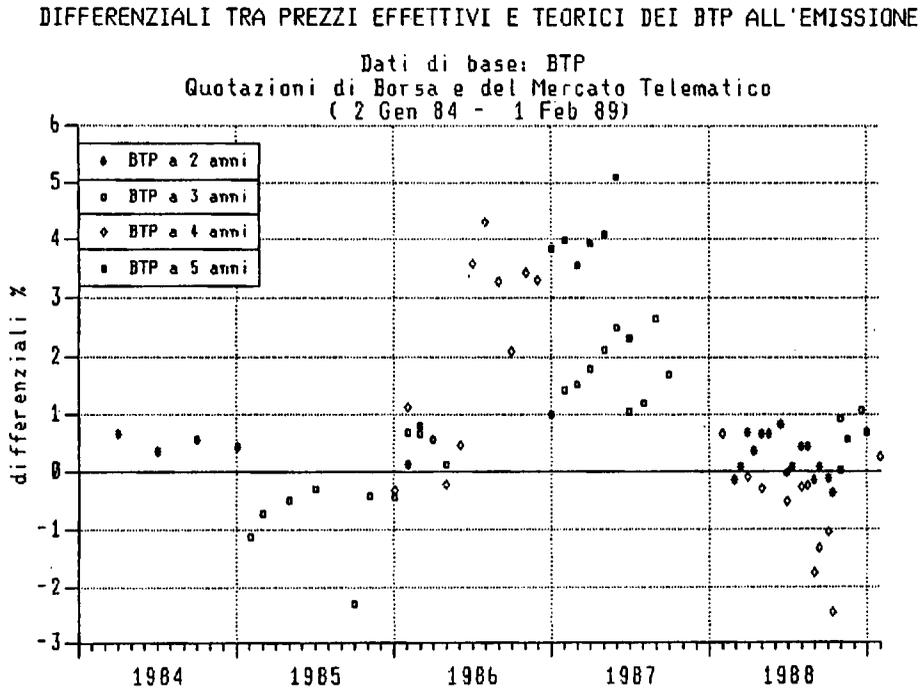


Nota: i rendimenti teorici dei titoli sono stati calcolati sulla base della curva dei rendimenti netti, ottenuta stimando il modello Cox, Ingersoll e Ross.

Un confronto tra prezzi di emissione e prezzi teorici, negli ultimi cinque anni, è stato fatto anche per i Buoni del Tesoro Poliennali; la figura 15 ne riporta i risultati. Sembra possibile distinguere con relativa chiarezza tre diversi periodi: nel primo, che si estende dal 1984 alla metà del 1986, le condizioni di emissione e quelle stimate dal modello risultano mediamente allineate; nel secondo, tra la metà del 1986 e la fine del 1987, le condizioni di emissione sono più penalizzanti; nel terzo, dal 1988 al febbraio del 1989, i prezzi si allineano nuovamente e si nota anzi una tendenza del Tesoro a offrire, nell'ultima parte

del 1988, BTP quadriennali a condizioni molto favorevoli.

Fig. 15



Nota: i prezzi teorici dei titoli sono stati calcolati sulla base della curva dei rendimenti netti, ottenuta stimando il modello Cox, Ingersoll e Ross.

4. CONCLUSIONI

Le curve dei rendimenti stimate sulla base del modello CIR assumono configurazioni più stabili e relativamente meno complesse rispetto a quelle risultanti dall'applicazione di metodi di tipo induttivo. Conformandosi ad un modello teorico, esse possono essere estrapolate al di fuori dell'intervallo delle scadenze osservate. Inoltre, i valori stimati dei parametri del modello risultano di interesse generale, convogliando ad esempio informazioni sulla volatilità futura attesa dei tassi di interesse.

La stima giornaliera della struttura dei rendimenti per scadenza sulla base del modello CIR ha confermato che esso spiega molto bene la variabilità osservata. La distribuzione dei

differenziali tra prezzi effettivi e prezzi teorici (26.058 osservazioni) risulta avere una media non significativamente diversa da zero. Nell'80 per cento dei casi tali differenziali risultano inferiori in valore assoluto a 0,50.

L'evoluzione delle curve dei rendimenti stimate si rivela coerente con quanto era lecito attendersi alla luce della conoscenza dei fatti avvenuti nel periodo in esame e delle interpretazioni già consolidate. In particolare, alla fine del primo semestre del 1986, dopo la crisi borsistica del mese di maggio e in concomitanza con il sorgere di difficoltà nel collocamento dei titoli di Stato, l'inclinazione della curva dei rendimenti subisce una brusca inversione, per l'improvviso innalzamento del tasso a lungo termine connesso con il mutamento delle aspettative. Inoltre, la volatilità implicita aumenta sensibilmente in coincidenza con il periodo di crisi dei mercati finanziari mondiali apertosi nell'ottobre 1987, anticipandolo lievemente.

La possibilità di determinare in base al modello i prezzi teorici per titoli a tasso fisso di qualsiasi scadenza consente di valutare l'efficienza del mercato secondario e di verificare la coerenza tra questo e il mercato primario. Un esame retrospettivo delle condizioni di tasso risultanti dalle aste dei BOT ha rivelato come queste, almeno dal 1986 ad oggi, siano state meno favorevoli di quelle stimate dal modello. L'entità della discrepanza appare particolarmente rilevante nel caso dei BOT annuali. Condizioni di emissione non favorevoli emergono anche per i BTP collocati tra la metà del 1986 e la fine del 1987; dall'inizio del 1988 esse appaiono invece maggiormente in linea con le stime offerte dal modello e tendono, anzi, ad essere molto favorevoli nel caso dei BTP quadriennali.

APPENDICE A

IL METODO DEI CUBIC SPLINES

La stima della curva dei rendimenti mediante regressione basata sull'uso degli splines polinomiali è stata originariamente proposta da McCulloch (1971, 1975). Essa consiste nel suddividere l'asse temporale in una serie di intervalli e nell'approssimare, in ciascun intervallo, la funzione che lega il prezzo P alla scadenza con una funzione polinomiale. Questa tecnica consente di lasciare un notevole grado di libertà alle forme funzionali che la curva può assumere, pur richiedendo la stima di una regressione lineare. Nel caso in cui vengano utilizzati polinomi di terzo grado (cubic splines) o di grado superiore, i tassi a termine impliciti nella curva risultano anch'essi legati alle scadenze da una funzione continua.

Per applicare la tecnica dei cubic splines alla stima della curva dei rendimenti, si assume che la discount function possa essere approssimata da una funzione a k parametri definita su k-2 intervalli compresi tra k-1 "nodi" d_j ($j=1, \dots, k-1$).²⁰ Ossia:

$$[a1] \quad P(t, T) = 1 + \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(T-t; d_1, d_2, \dots, d_{k-1}).$$

Le f_j sono funzioni polinomiali nell'argomento T-t di grado

20. La procedura di approssimazione mediante splines ha il suo fondamento teorico nel Teorema di Weierstrass, in base al quale una funzione continuamente differenziabile può essere approssimata in un intervallo, fino ad un errore arbitrariamente piccolo, da una polinomiale definita nello stesso intervallo. In altre parole, se si assume l'esistenza di una funzione di grado n che lega il prezzo P di un pure discount bond alla scadenza, è possibile trovare una polinomiale di grado inferiore a n che approssima la funzione con sufficiente accuratezza in un dato intervallo.

non superiore al terzo. Esse definiscono la cosiddetta "base" degli splines. Affinché risulti $P(T,T)=1$ deve essere $f_j(0)=0$.

Sostituendo la [a1] nella [1], si ha:

$$[a2] \quad B(t, t_n) = \sum_{i=1}^n c_i P(t, t_i) = \sum_{i=1}^n c_i [1 + \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(t_i - t)] = \alpha + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j$$

dove:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \quad e \quad x_j = \sum_{i=1}^n c_i f_j(t_i - t).$$

I coefficienti β_j della [a2] possono pertanto essere stimati mediante la seguente regressione lineare:

$$[a3] \quad b - \alpha = X\beta + \epsilon.$$

G. S. Shea (1984) ha dimostrato che la regressione [a3] mediante cubic splines è equivalente alla stima, mediante minimi quadrati vincolati, di una serie di $(k-2)$ polinomiali concatenate.²¹ Le polinomiali sono vincolate in modo tale che le loro ordinate e derivate prime e seconde siano uguali in corrispondenza di ciascun nodo. La risultante approssimazione della discount function risulta pertanto continua e due volte differenziabile. Questo assicura in particolare che i tassi a termine impliciti risultino funzione continua della scadenza.

Un problema fondamentale nell'applicazione degli splines consiste nella scelta del numero e della dislocazione dei "nodi" e nella specificazione della forma funzionale degli elementi f_j della "base".

21. Gli splines offrono però una rappresentazione più parsimoniosa: mentre con il modello dei minimi quadrati vincolati è necessaria la stima di $4k-8$ parametri, con il metodo delle cubic splines è sufficiente la stima di solo k parametri. Cfr. G. S. Shea (1984), p. 259.

Per quanto riguarda la scelta del numero $k-1$ di "nodi", occorre osservare che se k è troppo basso, l'approssimazione della discount function risulterà insufficiente se questa assume configurazioni complesse. D'altro canto, se k è troppo elevato (al limite uguale al numero n di osservazioni), la risultante funzione sarà libera di conformarsi esattamente ad eventuali outliers. In generale appare ragionevole scegliere k in modo tale che esso risulti una funzione crescente del numero n di osservazioni. Tale funzione dovrebbe inoltre essere definita in modo tale che il numero di osservazioni che cadono in ciascun intervallo, $n/(k-2)$, sia non decrescente al crescere di n . Per le applicazioni sviluppate in questo lavoro si è posto $k=\sqrt{n}$.

Al fine di assicurare una sufficiente accuratezza alla stima dei parametri β_j , appare opportuno scegliere la dislocazione dei nodi $(d_1, d_2, \dots, d_{k-1})$ in modo tale che in ciascun intervallo tra due nodi successivi si collochi un ugual numero di titoli in scadenza. In altre parole, se T_j è la serie, ordinata in senso crescente, delle scadenze degli n titoli del campione, allora si pone $d_1=0$ e:

$$d_j = T_h + \theta(T_{h+1} - T_h) \quad (j=2, \dots, k-1)$$

con $h =$ il più grande intero in $(j-1)n/(k-2)$

e $\theta = (j-1)n/(k-2) - h$.

Per quanto riguarda la scelta delle f_j , si è adottata la specificazione suggerita nell'appendice di McCulloch (1975).

Come nella stima del modello CIR, si è assunto che i residui della [a3] siano indipendenti tra loro e normalmente distribuiti, con media zero e varianza proporzionale alle derivate dei prezzi dei titoli rispetto ai rendimenti a scadenza. Si è inoltre adottata la procedura di esclusione degli outliers già descritta nel § 2.2.

APPENDICE B

Tav. 1

BTP QUOTATI ALLA BORSA DI MILANO
E NEL MERCATO TELEMATICO

Data	Numero titoli	Valore nominale (mld.)
30 Dic 83	7	15.890
31 Dic 84	8	29.019
31 Dic 85	9	23.056
31 Dic 86	21	49.582
31 Dic 87	33	70.803
30 Dic 88	47	112.527

PARAMETRI DEL MODELLO CIR
(stime giornaliere; 30 dicembre 1983 - 13 marzo 1989)

ϕ_1

Periodo	Media (1)	Dev. std. (2)	Coeff. var. (2)/(1)	Campo di variazione
84-89*	0,25901	0,00104	0,00403	0,25633 - 0,26733
1984	0,25938	0,00098	0,00378	0,25780 - 0,26292
1985	0,25834	0,00065	0,00252	0,25633 - 0,26228
1986	0,25860	0,00065	0,00251	0,25676 - 0,26075
1987	0,25942	0,00136	0,00522	0,25825 - 0,26733
1988*	0,25925	0,00109	0,00393	0,25839 - 0,26535
1989*	0,25923	0,00011	0,00042	0,25895 - 0,25945

ϕ_2

Periodo	Media (1)	Dev. std. (2)	Coeff. var. (2)/(1)	Campo di variazione
84-89*	0,25118	0,00104	0,00414	0,24618 - 0,25438
1984	0,25049	0,00132	0,00527	0,24618 - 0,25255
1985	0,25188	0,00077	0,00304	0,24757 - 0,25438
1986	0,25161	0,00067	0,00267	0,24968 - 0,25375
1987	0,25091	0,00105	0,00419	0,24669 - 0,25189
1988*	0,25106	0,00070	0,00278	0,24735 - 0,25173
1989*	0,25092	0,00011	0,00043	0,25076 - 0,25125

ϕ_3

Periodo	Media (1)	Dev. std. (2)	Coeff. var. (2)/(1)	Campo di variazione
84-89*	14,271	2,8197	0,19758	5,753 - 49,625
1984	12,391	2,4953	0,20138	6,218 - 16,458
1985	15,595	3,7402	0,23984	7,626 - 49,625
1986	15,105	1,8723	0,12395	8,978 - 22,485
1987	13,507	2,5194	0,18653	5,753 - 15,835
1988*	14,398	1,9975	0,13874	6,104 - 16,238
1989*	16,224	0,2962	0,01826	15,356 - 15,585

* I dati del 1989 si riferiscono al periodo 2 gennaio - 13 marzo.

TASSO D'INTERESSE ISTANTANEO (r) E TASSO A LUNGA ASINTOTICO (r_1)
 (Stime giornaliere; 30 dicembre 1983 - 13 marzo 1989)

r			
Periodo	Media	Dev. std. ¹	Campo di variazione
84-89*	11,519	3,156	8,071 - 16,129
1984	14,948	2,702	13,295 - 16,129
1985	13,293	3,655	11,849 - 14,250
1986	10,754	4,759	8,179 - 13,623
1987	9,574	2,022	8,071 - 10,740
1988*	9,423	1,945	8,914 - 9,988
1989*	9,466	1,989	9,026 - 10,665

r_1			
Periodo	Media	Dev. std. ¹	Campo di variazione
84-89*	10,774	11,333	4,199 - 16,187
1984	10,524	8,827	7,540 - 14,536
1985	9,794	14,319	4,255 - 14,180
1986	10,524	16,922	4,199 - 16,187
1987	10,968	5,386	8,520 - 13,765
1988*	11,520	7,784	8,504 - 14,096
1989*	13,489	8,534	11,815 - 14,195

* I dati del 1989 si riferiscono al periodo 2 gennaio - 13 marzo.
 1 Deviazione standard annualizzata delle variazioni assolute giornaliere.

Tav. 4

**COEFFICIENTI DI CORRELAZIONE TRA IL TASSO D'INTERESSE ISTANTANEO
E ALCUNI TASSI DI MERCATO MONETARIO**

Periodo	Tassi interbancari							BOT
	Overnight			Vista	7 giorni	1 mese	3 mesi	3 mesi
	£	\$	DM					
84-89*	0,40	0,70	0,16	0,93	0,90	0,95	0,93	0,98
1984	0,30	-0,25	-	0,02	0,62	0,66	-	0,79
1985	-0,08	-0,22	-	0,14	-0,10	-0,06	0,15	0,54
1986	0,60	0,46	-	0,94	0,93	0,93	0,94	0,94
1987	0,08	0,58	-	-0,26	0,00	0,18	0,53	0,61
1988	0,05	0,16	0,12	0,10	0,07	0,07	0,09	0,22
1989*	0,11	0,76	0,44	0,87	0,53	0,79	0,84	0,26

* I dati del 1989 si riferiscono al periodo 2 gennaio - 13 marzo.

Tav. 5

VARIABILITA' DEL TASSO D'INTERESSE ISTANTANEO (σ/r)
(Stime giornaliere; 30 dicembre 1983 - 13 marzo 1989)

Periodo	Media	Dev. std.	Campo di variazione
84-89*	2,1004	0,33214	1,1606 - 3,5880
1984	2,5592	0,31846	1,9602 - 3,5880
1985	2,0653	0,21638	1,1606 - 3,0926
1986	1,9269	0,19903	1,3213 - 2,3080
1987	2,0088	0,28440	1,7432 - 3,1487
1988	1,9606	0,17685	1,8144 - 2,8818
1989*	1,9865	0,03968	1,9092 - 2,0761

* I dati del 1989 si riferiscono al periodo 2 gennaio - 13 marzo.

**VALORE ATTESO DI LUNGO PERIODO DEL TASSO ISTANTANEO (μ)
E VELOCITA' DI AGGIUSTAMENTO (κ)**
(Stime giornaliere; 30 dicembre 1983 - 13 marzo 1989)

μ

Periodo	Media	Dev. std.	Campo di variazione
84-89*	11,128	1,80230	4,261 - 16,837
1984	10,917	1,42550	7,705 - 15,069
1985	10,059	1,85815	4,322 - 14,760
1986	10,834	2,26646	4,261 - 16,837
1987	11,536	1,20238	8,741 - 14,260
1988*	11,909	1,15063	8,874 - 14,605
1989*	13,951	0,56265	12,189 - 14,704

κ

Periodo	Media	Dev. std.	Campo di variazione
84-89*	0,2433	0,00308	0,2269 - 0,2524
1984	0,2416	0,00361	0,2296 - 0,2473
1985	0,2454	0,00218	0,2329 - 0,2524
1986	0,2446	0,00199	0,2386 - 0,2507
1987	0,2424	0,00341	0,2269 - 0,2455
1988*	0,2429	0,00238	0,2296 - 0,2451
1989*	0,2426	0,00032	0,2421 - 0,2436

* I dati del 1989 si riferiscono al periodo 2 gennaio - 13 marzo.

RENDIMENTI STIMATI

(Stime giornaliere; 30 dicembre 1983 - 13 marzo 1989)

Modello di Cox, Ingersoll e Ross

Scadenza	Media	Dev. std.	Campo di variazione
1 mese	12,233	2,5594	8,454 - 17,462
3 mesi	12,222	2,4978	8,548 - 17,383
6 mesi	12,206	2,4094	8,683 - 17,321
1 anno	12,173	2,2421	8,945 - 17,251
3 anni	12,047	1,7507	9,695 - 16,989
5 anni	11,939	1,4755	8,791 - 16,766

Cubic splines

Scadenza	Media	Dev. std.	Campo di variazione
1 mese	11,709	2,8855	6,101 - 17,112
3 mesi	11,771	2,7690	6,942 - 17,144
6 mesi	11,887	2,6154	7,962 - 17,188
1 anno	12,124	2,3124	8,712 - 17,256
3 anni	12,061	1,7022	9,668 - 17,128
5 anni	11,077	1,7812	7,175 - 17,668

**DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI:
MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS
(Venerdì 10 marzo 1989)**

Codice A.B.I.	Titolo	Aliq. fisc.	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.	Duration stocastica	
12499	BTP 1.4.89	12,00%	-	99,85	99,93	0,02	0,05
12601	BTP 1.5.89	10,50%	-	100,00	99,88	0,12	0,13
12231	BOT 15.6.89 (3 m)	12,50	12,50	97,27	97,40	-0,13	0,25
12232	BOT 15.9.89 (6 m)	12,50	12,50	94,85	94,82	0,03	0,50
12492	BTP 1.1.90	12,50%	-	101,10	100,99	0,11	0,77
12610	BTP 1.1.90	9,25%	6,25	98,32	98,10	0,21	0,78
12495	BTP 1.2.90	12,50%	-	101,30	101,11	0,19	0,85
12612	BTP 1.2.90	9,25%	6,25	97,95	97,93	0,02	0,86
12497	BTP 1.3.90	12,50%	-	101,50	101,28	0,22	0,93
12614	BTP 1.3.90	9,15%	6,25	96,60	97,74	-1,14	0,94
12628	BTP 1.3.90	10,50%	12,50	98,35	98,21	0,14	0,94
12233	BOT 15.3.90 (12 m)	12,50	12,50	90,11	89,83	0,28	1,00
12629	BTP 15.3.90	10,50%	12,50	98,25	98,16	0,09	0,98
12600	BTP 1.4.90	12,00%	-	100,70	100,83	-0,13	0,96
12616	BTP 1.4.90	9,15%	6,25	97,23	97,49	-0,26	0,98
12630	BTP 1.4.90	10,50%	12,50	97,80	98,06	-0,26	0,98
12632	BTP 15.4.90	10,50%	12,50	97,95	97,91	0,04	1,02
12602	BTP 1.5.90	10,50%	-	99,15	99,33	-0,18	1,05
12618	BTP 1.5.90	9,15%	6,25	97,20	97,28	-0,08	1,06
12633	BTP 1.5.90	10,50%	12,50	97,80	97,87	-0,07	1,06
12635	BTP 18.5.90	10,50%	12,50	97,75	97,81	-0,06	1,10
12603	BTP 1.6.90	10,00%	-	98,45	98,72	-0,27	1,14
12620	BTP 1.6.90	9,15%	6,25	97,00	97,09	-0,09	1,15
12636	BTP 16.6.90	10,50%	12,50	97,70	97,58	0,12	1,19
12604	BTP 1.7.90	9,50%	-	97,60	98,00	-0,40	1,22
12622	BTP 1.7.90	10,50%	6,25	97,80	98,39	-0,59	1,22
12637	BTP 1.7.90	11,00%	12,50	97,60	98,06	-0,46	1,22
12605	BTP 1.8.90	9,50%	-	97,60	97,88	-0,28	1,31
12624	BTP 1.8.90	10,50%	6,25	98,00	98,25	-0,25	1,30
12639	BTP 1.8.90	11,00%	12,50	97,90	97,94	-0,04	1,31
12606	BTP 1.9.90	9,25%	-	97,25	97,35	-0,10	1,40
12625	BTP 1.9.90	11,25%	12,50	98,90	98,02	0,88	1,39
12641	BTP 1.9.90	11,50%	12,50	98,10	98,32	-0,22	1,39
12607	BTP 1.10.90	9,25%	6,25	96,10	96,37	-0,27	1,41
12626	BTP 1.10.90	11,50%	12,50	98,30	98,31	-0,01	1,39
12608	BTP 1.11.90	9,25%	6,25	96,55	96,12	0,43	1,49
12609	BTP 1.12.90	9,25%	6,25	96,40	95,90	0,50	1,58
12498	BTP 1.3.91	12,50%	-	103,00	102,00	1,00	1,77
12611	BTP 1.1.92	9,25%	6,25	92,95	93,18	-0,23	2,42
12613	BTP 1.2.92	9,25%	6,25	93,15	92,94	0,21	2,51
12627	BTP 1.2.92	11,00%	12,50	95,80	95,18	0,62	2,48
12615	BTP 1.3.92	9,15%	6,25	93,55	92,57	0,98	2,59
12617	BTP 1.4.92	9,15%	6,25	92,80	92,36	0,44	2,51
12631	BTP 1.4.92	11,00%	12,50	93,45	94,86	-1,41	2,47

(continua)

(segue) Tav. 8

DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI:
MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS
 (Venerdì 10 marzo 1989)

Codice A.B.I.	Titolo	Aliq. fisc.	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.	Duration stocastica	
12619	BTP 1.5.92	9,15%	6,25	93,50	92,07	1,43	2,60
12634	BTP 1.5.92	11,00%	12,50	94,55	94,59	-0,04	2,56
12621	BTP 1.6.92	9,15%	6,25	93,85	91,91	1,94	2,68
12623	BTP 1.7.92	10,50%	6,25	98,30	95,13	3,17	2,71
12638	BTP 1.7.92	11,50%	12,50	96,00	95,59	0,41	2,70
12640	BTP 1.8.92	11,50%	12,50	95,20	95,32	-0,12	2,79
12642	BTP 1.9.92	12,50%	12,50	97,10	97,81	-0,71	2,84
12644	BTP 1.10.92	12,50%	12,50	96,33	97,73	-1,40	2,70

Tav. 9

DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI:
METODO DEI CUBIC SPLINES
 (Venerdì 10 marzo 1989)

Codice A.B.I.	Titolo	Aliq. fisc.	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.	Duration	
12499	BTP 1.4.89	12,00%	-	99,95	99,97	-0,02	0,05
12601	BTP 1.5.89	10,50%	-	100,00	99,98	0,02	0,13
12231	BOT 15.6.89	(3 m)	12,50	97,27	97,59	-0,32	0,25
12232	BOT 15.9.89	(6 m)	12,50	94,85	95,14	-0,29	0,50
12492	BTP 1.1.90	12,50%	-	101,10	101,19	-0,09	0,77
12610	BTP 1.1.90	9,25%	6,25	98,32	98,30	0,02	0,78
12495	BTP 1.2.90	12,50%	-	101,30	101,22	0,08	0,86
12612	BTP 1.2.90	9,25%	6,25	97,95	98,04	-0,09	0,86
12497	BTP 1.3.90	12,50%	-	101,50	101,31	0,19	0,93
12614	BTP 1.3.90	9,15%	6,25	96,60	97,76	-1,16	0,94
12628	BTP 1.3.90	10,50%	12,50	98,35	98,23	0,12	0,94
12233	BOT 15.3.90	(12 m)	12,50	90,11	89,80	0,32	1,00
12629	BTP 15.3.90	10,50%	12,50	98,25	98,14	0,11	0,98
12600	BTP 1.4.90	12,00%	-	100,70	100,76	-0,06	0,97
12616	BTP 1.4.90	9,15%	6,25	97,23	97,41	-0,19	0,99
12630	BTP 1.4.90	10,50%	12,50	97,80	97,98	-0,18	0,98
12632	BTP 15.4.90	10,50%	12,50	97,95	97,80	0,15	1,02
12602	BTP 1.5.90	10,50%	-	99,15	99,19	-0,04	1,06
12618	BTP 1.5.90	9,15%	6,25	97,20	97,14	0,06	1,07
12633	BTP 1.5.90	10,50%	12,50	97,80	97,73	0,07	1,07
12635	BTP 18.5.90	10,50%	12,50	97,75	97,64	0,11	1,11
12603	BTP 1.6.90	10,00%	-	98,45	98,53	-0,08	1,14
12620	BTP 1.6.90	9,15%	6,25	97,00	96,90	0,10	1,15

(continua)

DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI:
METODO DEI CUBIC SPLINES
 (Venerdì 10 marzo 1989)

Codice A.B.I.	Titolo	Aliq. fisc.	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.	Duration	
12636	BTP 16.6.90	10,50%	12,50	97,70	97,38	0,32	1,19
12604	BTP 1.7.90	9,50%	-	97,60	97,81	-0,21	1,23
12622	BTP 1.7.90	10,50%	6,25	97,80	98,20	-0,40	1,23
12637	BTP 1.7.90	11,00%	12,50	97,60	97,86	-0,26	1,23
12605	BTP 1.8.90	9,50%	-	97,60	97,71	-0,11	1,31
12624	BTP 1.8.90	10,50%	6,25	98,00	98,09	-0,09	1,31
12639	BTP 1.8.90	11,00%	12,50	97,90	97,78	0,12	1,31
12606	BTP 1.9.90	9,25%	-	97,25	97,25	0,00	1,40
12625	BTP 1.9.90	11,25%	12,50	98,90	97,92	0,98	1,40
12641	BTP 1.9.90	11,50%	12,50	98,10	98,22	-0,12	1,40
12607	BTP 1.10.90	9,25%	6,25	96,10	96,34	-0,24	1,42
12626	BTP 1.10.90	11,50%	12,50	98,30	98,29	0,01	1,41
12608	BTP 1.11.90	9,25%	6,25	96,55	96,21	0,34	1,51
12609	BTP 1.12.90	9,25%	6,25	96,40	96,10	0,30	1,60
12498	BTP 1.3.91	12,50%	-	103,00	102,61	0,39	1,80
12611	BTP 1.1.92	9,25%	6,25	92,95	94,13	-1,18	2,49
12613	BTP 1.2.92	9,25%	6,25	93,15	93,77	-0,62	2,58
12627	BTP 1.2.92	11,00%	12,50	95,80	96,02	-0,22	2,56
12615	BTP 1.3.92	9,15%	6,25	93,55	93,27	0,28	2,66
12617	BTP 1.4.92	9,15%	6,25	92,80	92,89	-0,09	2,63
12631	BTP 1.4.92	11,00%	12,50	93,45	95,40	-1,95	2,58
12619	BTP 1.5.92	9,15%	6,25	93,50	92,37	1,13	2,72
12634	BTP 1.5.92	11,00%	12,50	94,55	94,91	-0,36	2,68
12621	BTP 1.6.92	9,15%	6,25	93,85	92,00	1,85	2,80
12623	BTP 1.7.92	10,50%	6,25	98,30	94,98	3,32	2,84
12638	BTP 1.7.92	11,50%	12,50	96,00	95,44	0,56	2,82
12640	BTP 1.8.92	11,50%	12,50	95,20	94,86	0,34	2,91
12642	BTP 1.9.92	12,50%	12,50	97,10	97,04	0,06	2,96
12644	BTP 1.10.92	12,50%	12,50	96,33	96,61	-0,28	2,88

Tav. 10

PREZZI E RENDIMENTI NETTI TEORICI:
MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS
 (Venerdì 10 marzo 1989)

Scadenze	Prezzi teorici	Rendimenti	Rendimenti a termine		
		a pronti	3 mesi	6 mesi	12 mesi
1 mese	99,15	10,95	11,09	11,20	11,38
3 mesi	97,45	11,02	11,23	11,33	11,50
6 mesi	94,79	11,13	11,43	11,52	11,68
1 anno	89,83	11,32	11,76	11,85	11,99
2 anni	80,22	11,65	12,32	12,38	12,49
3 anni	71,31	11,93	12,74	12,79	12,87

Dati di base: BTP quotati sul mercato secondario (borsa valori di Milano e circuito telematico).

Tav. 11

PREZZI E RENDIMENTI NETTI TEORICI:
METODO DELLE CUBIC SPLINES
 (Venerdì 10 marzo 1989)

Scadenze	Prezzi teorici	Rendimenti	Rendimenti a termine		
		a pronti	3 mesi	6 mesi	12 mesi
1 mese	99,21	10,19	10,23	10,59	11,59
3 mesi	97,64	10,18	10,58	11,21	11,97
6 mesi	95,11	10,40	11,85	12,38	12,16
1 anno	89,80	11,36	12,65	11,97	11,09
2 anni	80,84	11,22	10,44	11,05	12,52
3 anni	71,84	11,66	16,80	17,93	-

Dati di base: BTP quotati sul mercato secondario (borsa valori di Milano e circuito telematico).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- A. ANANTHANARAYANAN e E. SCHWARTZ (1980), Retractable and Extendible bonds: The Canadian Experience, "Journal of Finance", n. 1, pp. 31-47.
- E. BARONE e R. CESARI (1986), Rischio e rendimento dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile in un modello stocastico univariato, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 73.
- E. BARONE e D. CUOCO (1989), La valutazione dei titoli con opzione di rimborso anticipato: un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 118.
- R. BROWN e S. SCHAEFER (1988), Testing the Cox, Ingersoll & Ross Model on British Government Index-Linked Securities, London Business School, (IFA-109-88).
- S. BROWN e P. DYBVIG (1986), The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates, "Journal of Finance", n. 3, pp. 617-632.
- W. R. CARLETON e I. COOPER (1976), Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates, "Journal of Finance", n. 4, pp. 1067-1083.
- J. C. COX, J. E. INGERSOLL e S. A. ROSS (1979), Duration and the Measurement of Basis Risk, "Journal of Business", vol. 52, n. 1, pp. 51-61.
- J. C. COX, J. E. INGERSOLL e S. A. ROSS (1985a), An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, "Econometrica", n. 2, pp. 363-384.
- J. C. COX, J. E. INGERSOLL e S. A. ROSS (1985b), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, "Econometrica", n. 2, pp. 385-407.
- J. C. DERMODY e E. Z. PRISMAN (1988), Term Structure Multiplicity and Clientele in Markets with Transaction Costs and Taxes, "Journal of Finance", n. 4, pp. 893-911.
- M. GIBBONS e K. RAMASWAMY (1986), The Term Structure of Interest Rates: Empirical Evidence, Unpublished Working Paper.
- M. LIVINGSTON e J. CAKS (1977), A "Duration" Fallacy, "Journal of Finance", n. 1, pp. 185-187.
- F. R. MACAULAY (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, New York, National Bureau of Economic Research.

- R.S. MASERA (1972), The Term Structure of Interest Rates, Oxford, Clarendon Press.
- J. H. McCULLOCH (1971), Measuring the Term Structure of Interest Rates, "Journal of Business", n. 1, pp. 19-31.
- J. H. McCULLOCH (1975), The Tax Adjusted Yield Curve, "Journal of Finance", n. 3, pp. 811-829.
- G. S. SHEA (1984), Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", n. 3, pp. 253-269.

ELENCO DEI PIÙ RECENTI TEMI DI DISCUSSIONE (*)

- n. 102 — *Alcune considerazioni sugli effetti di capitalizzazione determinati dalla tassazione dei titoli di Stato*, di D. FRANCO - N. SARTOR (luglio 1988).
- n. 103 — *La coesione dello SME e il ruolo dei fattori esterni: un'analisi in termini di commercio estero*, di L. BINI SMAGHI - S. VONA (luglio 1988).
- n. 104 — *Stime in tempo reale della produzione industriale*, di G. BODO - A. CIVIDINI - L. F. SIGNORINI (luglio 1988).
- n. 105 — *On the difference between tax and spending policies in models with finite horizons*, di W. H. BRANSON - G. GALLI (ottobre 1988).
- n. 106 — *Non nested testing procedures: Monte Carlo evidence and post simulation analysis in dynamic models*, di G. PARIGI (ottobre 1988).
- n. 107 — *Completamento del mercato unico. Conseguenze reali e monetarie*, di A. FAZIO (ottobre 1988).
- n. 108 — *Modello mensile del mercato monetario*, (ottobre 1988).
- n. 109 — *Il mercato unico europeo e l'armonizzazione dell'IVA e delle accise*, di C. A. BOLLINO - V. CERIANI - R. VIOLI (dicembre 1988).
- n. 110 — *Il mercato dei contratti a premio in Italia*, di E. BARONE - D. CUOCO (dicembre 1988).
- n. 111 — *Delegated screening and reputation in a theory of financial intermediaries*, di D. TERLIZZESE (dicembre 1988).
- n. 112 — *Procedure di destagionalizzazione dei depositi bancari mensili in Italia*, di A. CIVIDINI - C. COTTARELLI (gennaio 1989).
- n. 113 — *Intermediazione finanziaria non bancaria e gruppi bancari plurifunzionali: le esigenze di regolamentazione prudenziale*, (febbraio 1989).
- n. 114 — *La tassazione delle rendite finanziarie nella CEE alla luce della liberalizzazione valutaria* (febbraio 1989).
- n. 115 — *Il ruolo delle esportazioni nel processo di crescita e di aggiustamento dei PVS*, di L. BINI SMAGHI - D. PORCIANI - L. TORNETTA (marzo 1989).
- n. 116 — *LDCs' repayment problems: a probit analysis*, di F. DI MAURO - F. MAZZOLA (maggio 1989).
- n. 117 — *Mercato interbancario e gestione degli attivi bancari: tendenze recenti e linee di sviluppo*, di G. FERRI - P. MARULLO REEDTZ (giugno 1989).
- n. 118 — *La valutazione dei titoli con opzione di rimborso anticipato: un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross ai CTO*, di E. BARONE - D. CUOCO (giugno 1989).
- n. 119 — *Cooperation in managing the dollar (1985-87): interventions in foreign exchange markets and interest rates*, di E. GAIOTTI - P. GIUCCA - S. MICOSI (giugno 1989).
- n. 120 — *The US current account imbalance and the dollar: the issue of the exchange rate pass-through*, di C. MASTROPASQUA - S. VONA (giugno 1989).
- n. 121 — *On incentive-compatible sharing contracts*, di D. TERLIZZESE (giugno 1989).
- n. 122 — *The adjustment of the US current account imbalance: the role of international policy coordination*, di G. GOMEL, G. MARCHESI - J. C. MARTINEZ OLIVA (luglio 1989).
- n. 123 — *Disoccupazione e dualismo territoriale*, di G. BODO - P. SESTITO (agosto 1989).
- n. 124 — *Redditi da lavoro dipendente: un'analisi in termini di capitale umano*, di L. CANNARI - G. PELLEGRINI - P. SESTITO (settembre 1989).
- n. 125 — *On the estimation of stochastic differential equations: the continuous-time maximum-likelihood approach*, di R. CESARI (settembre 1989).
- n. 126 — *La misurazione dell'efficienza nei modelli di «frontiera»*, di M. GRETI (settembre 1989).
- n. 127 — *Do Intergenerational Transfers Offset Capital Market Imperfections? Evidence from a Cross-Section of Italian Households*, di L. GUIO - T. JAPPELLI (settembre 1989).

(*) I «Temi» possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.

