BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

La misurazione dell'efficienza nei modelli di «frontiera»

di Maurizio Gresti

Numero 126 - Settembre 1989

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

La misurazione dell'efficienza nei modelli di «frontiera»

di Maurizio Gresti

Numero 126 - Settembre 1989

La serie «Temi di discussione» intende promuovere la circolazione, in versione provvisoria, di lavori prodotti all'interno della Banca d'Italia o presentati da economisti esterni nel corso di seminari presso l'Istituto, al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

I lavori pubblicati nella serie riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità dell'Istituto.

SOMMARIO

L'efficienza del processo produttivo può essere analizzata nell'ambito della teoria microeconomica attraverso l'impiego di modelli di ottimizzazione. Nell'ultimo decennio tale analisi si è arricchita di numerosi contributi incentrati soprattutto sui modelli di frontiera nei quali viene stimato il livello massimo di output in accordo con la definizione teorica dell'isoquanto di produzione e dove il termine erratico costituisce l'indicatore dell'efficienza. Dal punto di vista econometrico questi modelli sollevano interessanti questioni legate alla distribuzione asimmetrica del termine erratico.
Questo lavoro presenta una rassegna dei principali modelli di analisi dell'efficienza con particolare riguardo a quelli di frontiera ed ai loro aspetti quantitativi.

INDICE

1. DEFINIZIONE E ANALISI DELL'EFFICIENZA (*)

1.1 Misurazione teorica dell'efficienza aziendale.

Dato il livello di produzione ed i prezzi relativi dei fattori un'impresa è efficiente dal punto di vista tecnico ed allocativo se impiega i fattori produttivi in un rapporto "ottimale" secondo le conoscenze tecnologiche più progredite e in una quantità che minimizza i costi. L'efficienza è pertanto misurabile confrontando la performance reale dell'impresa con quella ottimale determinata dalla massimizzazione del profitto o minimizzazione dei costi.

Dal punto di vista teorico tale misura coincide con la distanza di un dato punto nel piano X_1X_2 dei fattori produttivi con le sue proiezioni sull'isoquanto di produzione e l'isocosto ad esso associato (Fig.1).

Dato il livello di produzione Y* ed i prezzi relativi PP', il punto di tangenza Q individua le quantità ottimali dei fattori produttivi. Il punto A invece corrisponde ad un impiego tecnicamente ed economicamente inefficiente dei fattori produttivi X_1X_2 ed una riduzione nella quantità di entrambi i fattori, a parità di rapporto, eliminerebbe l'inefficienza tecnica (B) o allocativa (R) ma non entrambe.

Tali inefficienze sono misurabili dai rapporti OB/OA (tecnica) ed OR/OB (allocativa) mentre l'inefficienza complessiva

---

(*) L'autore, che rimane responsabile degli eventuali errori ed omissioni presenti nel lavoro, ringrazia un anonimo referee per i preziosi suggerimenti.

è data da OB/OA x OR/OB = OR/OA.

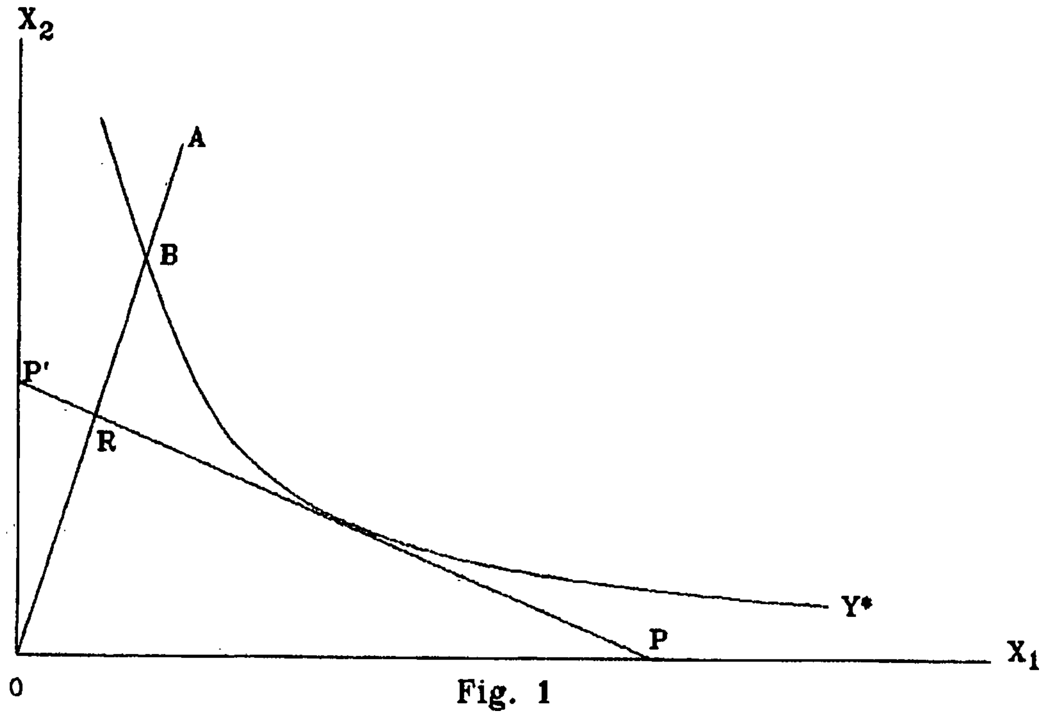

Fig. 1

1.2 <u>I modelli di ottimizzazione per l'analisi dell'efficienza.</u>

L'analisi dell'efficienza formulata nell'ambito di modelli di ottimizzazione si è sviluppata secondo due distinti approcci.

Il primo stima l'efficienza tramite coefficienti "ad hoc" inseriti nella funzione di produzione o di costo mentre il secondo utilizza la c.d. versione di "frontiera" di tali funzioni dove l'eventuale presenza di elementi di inefficienza viene segnalata dal termine erratico.

Nel primo tipo di modello si utilizzano tutte le osservazioni disponibili indipendentemente dal grado di efficienza economica e tecnica delle singole imprese e si stima pertanto una funzione di produzione che rispecchia il know-how e la situazione "media" del settore 1/.

Le imprese si possono posizionare all'interno o all'esterno di tale stima per effetto della componente erratica che comprende shocks casuali non controllabili dall'impresa ed elementi di inefficienza. L'efficienza aziendale viene pertanto stimata rispetto al valore medio del settore e la componente casuale del termine erratico, che non viene individuata ed isolata, contribuisce erroneamente a tale stima.

Per tali motivi i risultati di questi modelli sono in generale imprecisi e poco affidabili.

I modelli di "frontiera" sono basati su ipotesi non classiche di distribuzione del termine erratico 2/ e la stima della funzione di produzione risulta ampiamente influenzata dalle imprese più efficienti collocate sul "contorno" interno delle osservazioni.

In tali modelli l'efficienza viene quindi definita rispetto alle migliori condizioni tecnico-economiche esistenti nel settore mentre la particolare struttura del termine erratico consente di isolare la sua componente puramente "casuale" ottenendo pertanto stime dell'efficienza più precise ed affidabili. Rispetto alle procedure di stima si possono infine distinguere modelli matematici e modelli statistici. I primi, che generalmente utilizzano la programmazione lineare, presentano maggiore flessibilità nella formulazione della funzione di produzione ma la bontà delle loro stime non può essere verificata attraverso gli usuali tests poichè gli stimatori non hanno proprietà statistiche note. Nei modelli statistici tale flessibilità risulta inferiore poichè le procedure di stima richiedono l'adozione di particolari funzioni di produzione con determinate caratteristiche ma si ottengono informazioni più accurate sulla bontà degli stimatori.

La versione più generale dei modelli di frontiera è quella c.d. "stocastica" nella quale il processo produttivo è rappresentato da una variabile casuale soggetta a due tipi di disturbi aventi caratteristiche economico-statistiche differenti. Il primo, comune a tutte le relazioni empiriche, è di natura puramente casuale, il secondo riassume gli elementi di inefficienza dell'azienda.

Il termine erratico viene pertanto diviso in due componenti. La prima, data la natura casuale dei disturbi (shocks non controllabili dall'impresa, errori di misurazione, ecc.) deve avere valore atteso nullo é distribuzione simmetrica. La seconda componente, oltre che rappresentare gli elementi di inefficienza, è disegnata per ottenere la frontiera e quindi il suo valore atteso non può essere nullo e le osservazioni non possono collocarsi oltre un determinato limite. La scelta della funzione di distribuzione di questo termine è quindi ristretta a famiglie funzionali con media diversa da zero e distribuzione asimmetrica.

A parte queste considerazioni di carattere generale, la scarsa conoscenza del meccanismo probabilistico che genera gli elementi di inefficienza, preclude la possibilità di dare fondamento economico alla scelta di una particolare funzione all'interno di detta famiglia. Tale scelta, cruciale per l'applicabilità delle tecniche econometriche e per la qualità delle stime, appare determinata più da motivazioni di convenienza statistica che da ragionamenti economici.

I modelli di frontiera hanno il fondamentale pregio di isolare gli elementi erratici non controllabili dall'azienda-e dei quali essa non è pertanto responsabile-evitando che i loro effetti sul processo produttivo vengano inglobati nella stima dell'efficienza.

Inoltre esiste la possibilità di stimare l'efficienza complessiva della singola impresa, distinguere la componente tecnica da quella economica ed analizzare la correlazione esistente tra questi due elementi dell'efficienza 3/.

Nell'ambito di tali modelli si possono considerare anche le strategie aziendali di più lungo periodo e analizzare quindi l'eventualità che l'impresa scelga deliberatamente una composizione dei fattori non ottimale nel breve periodo ma efficiente rispetto a tali strategie 4/.

Il limite principale dei modelli di frontiera, soprattutto se impiegano procedure statistiche di stima, è la scarsa flessibilità nella scelta della forma funzionale della funzione di produzione e della distribuzione del termine erratico. Inoltre, la stima dell'efficienza della singola impresa, la distinzione tra contenuto tecnico ed economico e l'analisi della correlazione tra questi due elementi, è laboriosa anche con specificazioni molto semplici della funzione di produzione.

2. L'ANALISI DELL'EFFICIENZA NEI MODELLI DI OTTIMIZZAZIONE

2.1 I modelli non statistici.

La prima analisi dell'efficienza in un modello di ottimizzazione è stata proposta da Farrell nel 1957 5/.

In tale modello la funzione di produzione di frontiera viene identificata con la spezzata, stimata con la programmazione lineare, che unisce le osservazioni relative alle imprese più efficienti. La trasformazione lineare di due punti di tale spezzata consente di determinare l'immagine "teoricamente" efficiente e caratterizzata dallo stesso rapporto tra i fattori produttivi di qualsiasi impresa che non giace sulla frontiera di produzione (Fig.2).

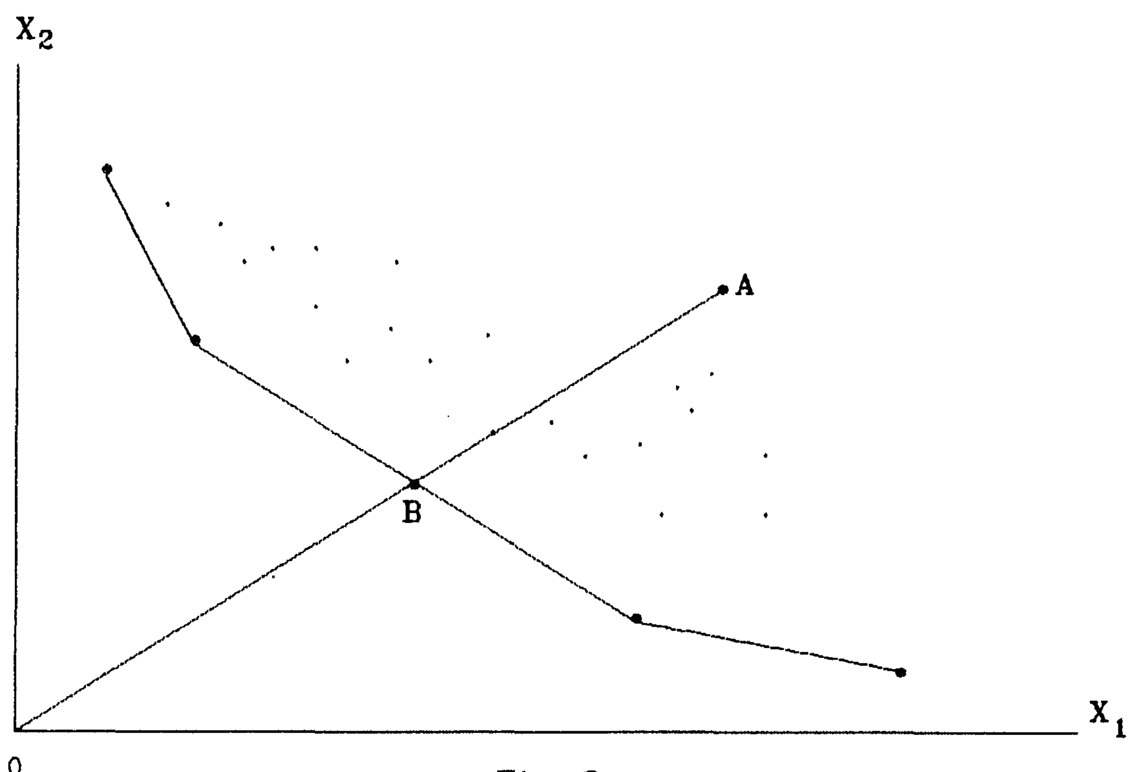

Fig. 2

La misura dell'efficienza tecnica è ottenuta dal confronto del punto che realmente identifica l'impresa osservata (A) e la sua immagine sulla frontiera (B).

L'efficienza allocativa può essere analizzata in modo analogo confrontando i costi realmente sostenuti dall'impresa con i costi minimi legati ad un dato livello di produzione.

Questo modello identifica separatamente l'efficienza tecnica ed allocativa per ogni singola impresa, non è vincolato all'assunzione di specifiche forme funzionali della frontiera di produzione e, grazie all'impiego della programmazione lineare, può essere facilmente esteso a più fattori produttivi.

Tuttavia le stime ottenute con la programmazione lineare risultano sensibili alla numerosità ed ai valori estremi del campione nonchè ai criteri di misurazione dei fattori produttivi. Inoltre, poichè la variabile erratica non viene modellata, gli effetti degli shocks casuali contribuiscono alla stima dell'efficienza.

Il limite principale di questo approccio non parametrico è però costituito dalla ambiguità della misura dell'efficienza in presenza di rendimenti di scala crescenti o decrescenti. L'aumento del grado di efficienza può essere infatti valutato in termini di minor utilizzo dei fattori produttivi a parità di output, oppure di aumento di output a parità di fattori produttivi e queste valutazioni non coincidono se non nel caso di rendimenti di scala costanti.

La necessità di estendere il modello al caso di rendimenti di scala non costanti suggerisce l'abbandono dell'approccio non parametrico 6/.

Venne pertanto stimata una frontiera tipo Cobb-Douglas con la tecnica della programmazione lineare (quadratica) vincolando i residui ad avere uno solo segno e minimizzando la loro somma (somma dei loro quadrati) 7/.

In questo modello si suppone che non vi siano asimmetrie d'informazione e che le conoscenze tecnologiche siano uniformemente diffuse tra tutte le imprese. Dopo aver stimato la funzione di produzione di frontiera del settore si derivano le funzioni di produzione delle singole aziende ed il grado di efficienza tecnica viene determinato dal confronto dei parametri che caratterizzano queste due funzioni.

L'efficienza allocativa viene analizzata aggiungendo un termine erratico, con media nulla e varianza costante, alle condizioni di primo ordine della minimizzazione dei costi di produzione. In tal modo si può contemplare l'eventualità che le imprese commettano errori non sistematici nell'adeguare la composizione dei fattori produttivi al variare dei prezzi relativi.

Tale modello permette la stima delle efficienze a livello aziendale e non è vincolato all'ipotesi di rendimenti di scala costanti ma presenta alcune rigidità generate dalla forma funzionale utilizzata e le stime restano sensibili alla numerosità ed ai valori estremi del campione 8/.

2.2 I modelli statistici.

Stimatori con propietà statistiche note vengono ottenuti abbandonando i procedimenti di stima matematici in favore di quelli propriamente statistici e formulando ipotesi specifiche sulla distribuzione del termine erratico. Le diverse specificazioni di tale distribuzione portano ai c.d. modelli di frontiera statistici 9/ dove l'errore è vincolato ad essere solamente positivo (o negativo) e stocastici 10/ nei quali l'errore viene decomposto in due parti 11/.

Nei modelli stocastici la funzione di produzione della j-ma impresa viene rappresentata da $y_j = f\{X_j, \alpha_j) \exp\{\epsilon_j\}$ dove $y_j(1,1)$ è l'output, $X_j(n,1)$ è il vettore dei fattori produttivi, α_j è il vettore di parametri ed $\exp\{\epsilon_j\}$ è il termine erratico nel quale $\epsilon_j = v_j - u_j$. Mentre la distribuzione di v_j è simmetrica con media nulla per effetto delle componenti casuali, u_j ha una distribuzione asimmetrica con media non nulla tale che $u_j \geq 0$ per rappresentare gli elementi di inefficienza 12/.

Le prime formulazioni dei modelli stocastici presentano due importanti limitazioni: (i) l'efficienza allocativa non è più separabile da quella tecnica; (ii) la stima dell'efficienza della singola azienda diventa problematica 13/.

2.3 Il modello duale.

La relazione biunivoca esistente tra le funzioni di produzione, costo e profitto permette di passare algebricamente da una funzione all'altra se la forma funzionale prescelta ha determinate proprietà (quali la Cobb-Douglas o la Constant

Elasticities of Substitution).

Utilizzando una funzione di produzione stocastica del tipo $y_j=A\prod_{i=1}^{n} X_i \exp\{\epsilon_j\}$, dove $\epsilon_j=v_j-u_j$, e aggiungendo un termine erratico Ω_j alle condizioni del primo ordine nella minimizzazione dei costi, si può analizzare il caso della contemporanea presenza di inefficienza tecnica ed allocativa e quest'ultima risulta sempre stimabile a livello aziendale 14/.

Questo approccio consente inoltre di verificare l'ipotesi di perfetta concorrenza e di analizzare gli effetti delle strategie di medio-lungo periodo sul livello di efficienza dell'impresa. Essa potrebbe infatti scegliere una composizione di fattori produttivi sistematicamente diversa da quella ottimale di breve periodo poichè le condizioni di perfetta concorrenza non sono completamente soddisfatte e/o per effetto delle sue strategie di più lungo respiro. In tal caso il valore atteso della sequenza degli errori allocativi Ω_j risulterebbe significativamente diverso da zero.

Nonostante questi apprezzabili risultati l'approccio duale risulta limitato dalla scarsa flessibilità di scelta della forma funzionale della frontiera.

2.4 I problemi ancora aperti nell'analisi dell'efficienza.

L'analisi dell'efficienza nei modelli di ottimizzazione presenta alcuni aspetti suscettibili di approfondimento, in particolare:

(i) la possibilità di utilizzare funzioni di produzione flessibili quali la translogaritmica; (ii) l'analisi dinamica dell'efficienza; (iii) l'analisi di vincoli tecnologici e/o di mercato che possono limitare le possibilità di aggiustamenti per raggiungere la piena efficienza.

2.4.1 <u>La frontiera di produzione translogaritmica.</u>

Nel caso di un'impresa monoprodotto che utilizza due fattori produttivi e la cui tecnologia può essere rappresentata da una funzione di produzione omogenea di grado uno, tutte le informazioni necessarie alla stima dell'efficienza tecnica ed allocativa possono essere ricavate dalla funzione di costo.

Generalizzando l'approccio di Farrell si può determinare il punto A" che misura l'efficienza tecnica dell'impresa localizzata in A senza stimare la funzione di produzione poichè esso rappresenta certamente, oltre che una trasformazione lineare di A, la composizione ottimale dei fattori per il vettore di prezzi $P^* \neq P'$ (Fig.3).

Poichè A ed A" sono ricavabili utilizzando solamente la funzione di costo è possibile impiegare forme funzionali flessibili come la translogaritmica per le quali non esiste una soluzione algebrica del problema duale.

In tal modo è possibile generalizzare il modello ad n fattori produttivi ed m prodotti e analizzare, oltre alla efficienza tecnica ed allocativa, l'efficienza della scala di produzione e l'efficienza nel mix di prodotti finali <u>15</u>/.

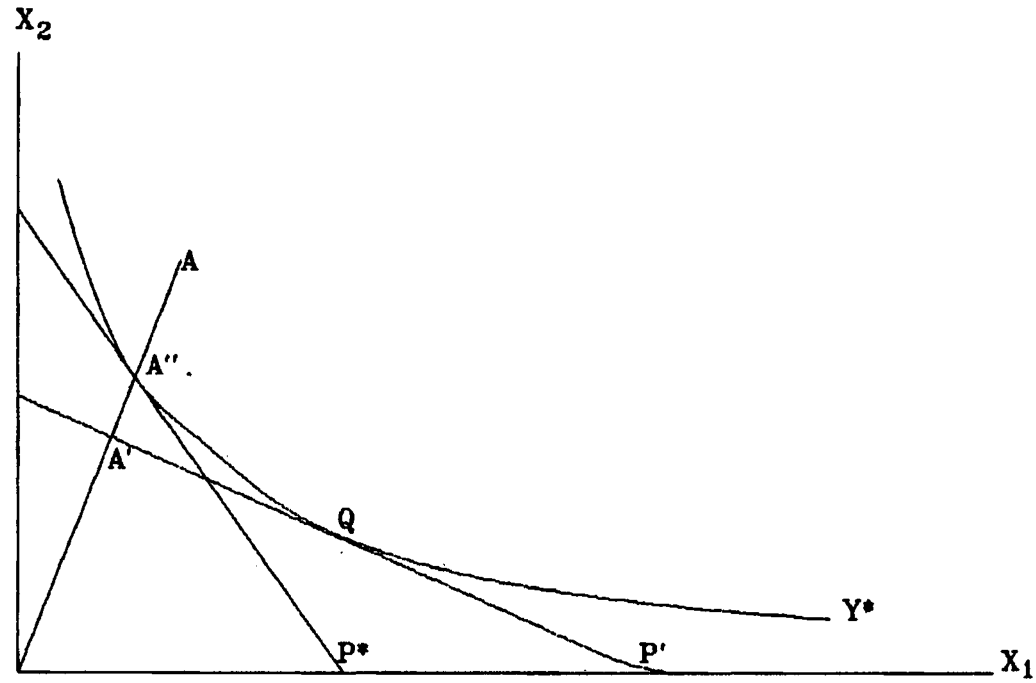

Fig. 3

2.4.2 L'analisi dinamica dell'efficienza.

L'efficienza può essere analizzata confrontando imprese con output omogeneo ma tecnologie differenti, oppure imprese a tecnologia omogenea. Nel primo caso si intende valutare principalmente la correttezza della scelta tecnologica ("ex-ante") mentre nel secondo si considera l'efficienza delle modalità di utilizzo di una data tecnologia ("ex-post") 16/.

L'aspetto dinamico dell'efficienza, rinvenibile nella sua definizione "ex-ante", è quindi strettamente connesso alle scelte tecnologiche dell'impresa. Prima di tali scelte esistono molteplici rapporti di composizione dei fattori per un dato livello di produzione mentre a scelta avvenuta tale rapporto è quasi fisso ed ogni sua variazione al mutare dei prezzi relativi dei fattori diventa problematica e costosa (tecnologia "putty-clay").

In pratica un'impresa non è caratterizzata da un unico punto nello spazio dei fattori produttivi ma da una molteplicità di punti (A e B in Fig. 4) ognuno dei quali individua un

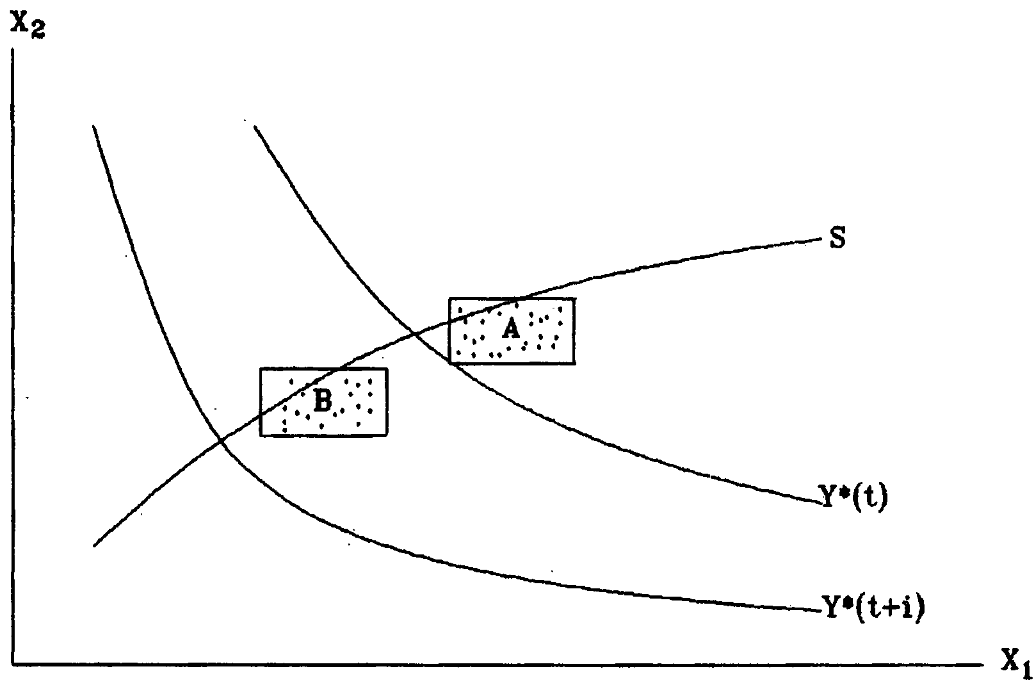

Fig. 4

capitale di una certa generazione non ancora dismesso dall'azienda collocato vicino alla frontiera di produzione prevalente per quella generazione. Le previsioni tecnologiche consentono di stimare le frontiere efficienti che prevarranno in futuro (y^*_{t+i}) ed è possibile determinare un sentiero ottimale (S) in base alla funzione obiettivo dell'azienda. Dal punto di vista dinamico una dismissione repentina dei capitali di vecchia generazione può non risultare conveniente ed una struttura produttiva "dispersa" può essere inefficiente in senso statico ma non altrettanto in senso dinamico in quanto essa viene valutata rispetto al sentiero ottimale.

2.4.3 <u>Razionamento dei mercati.</u>

La realizzazione della piena efficienza può essere ostacolata dalla presenza di rigidità nella domanda ed offerta dei fattori produttivi che, limitando le possibilità di modificare la loro composizione, consentono di ripiegare solo su posizioni di "second best".

Tali rigidità possono riguardare l'intero mercato oppure le schede di domanda dei fattori produttivi della singola impresa vincolate dalle sue scelte tecnico-manageriali.

In tali situazioni è utile disporre di misure dell'efficienza che consentano: (i) la stima del contributo del singolo fattore all'efficienza complessiva; (ii) i miglioramenti di efficienza di un fattore ottenibili in presenza di rigidità dell'altro fattore; (iii) un confronto dell'efficienza di "first best" e di "second best" per poter valutare i "costi" di queste rigidità <u>17</u>/. Se per es. l'offerta del fattore produttivo X_1 è limitata a $\overset{A}{X}_1<\overset{Q}{X}_1$ mentre la domanda/offerta di X_2 è pienamente flessibile, un'impresa posizionata in A può realizzare l'efficienza tecnica (B) ma non l'efficienza tecnico-allocativa del punto Q (Fig.5).

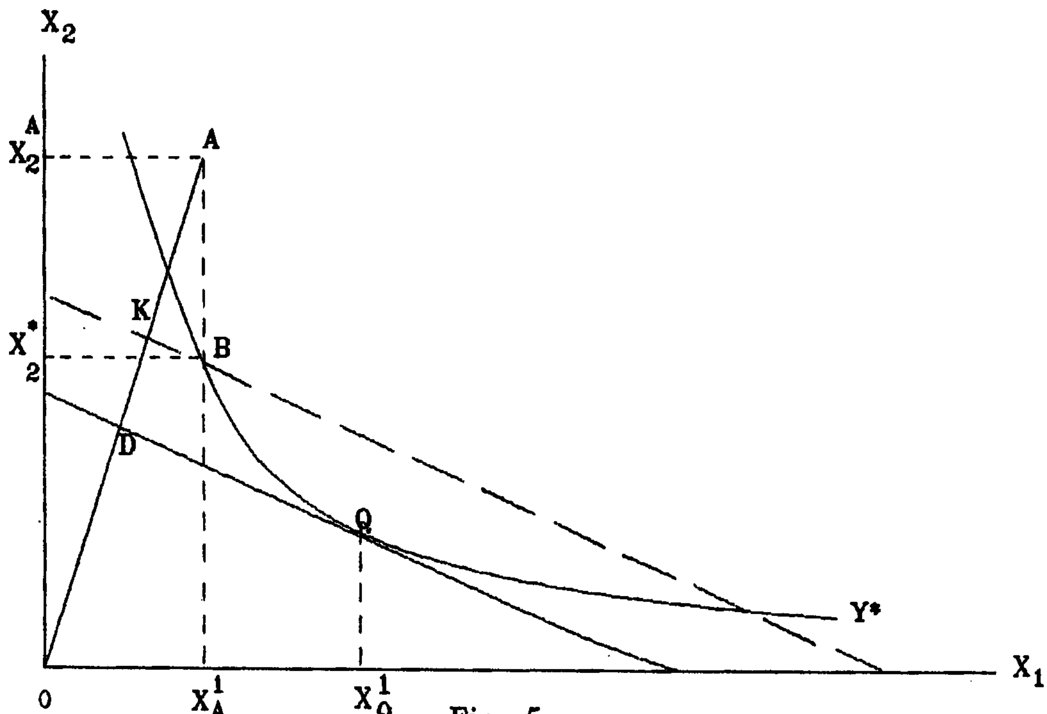

Fig. 5

La diminuzione nell'impiego del fattore produttivo X_2 comporta un aumento della sua efficienza tecnica, misurato dal rapporto $O\overset{*}{X_2}/O\hat{X}_2$, che si traduce in una riduzione dei costi misurata dal rapporto OK/OA. L'efficienza allocativa di X_2 è calcolata in termini di isocosto minimo dal rapporto OD/OK. Un'analisi simile può essere fatta in presenza di rigidità del fattore produttivo X_2 e di flessibilità di X_1 nonchè di vischiosità nella domanda/offerta di entrambi i fattori.

3. GLI ASPETTI QUANTITATIVI

3.1 Aspetti generali.

Data la funzione di produzione $y=f\{X,\alpha\}$, dove α è il vettore (1,k) dei parametri, $y \in R_+$ è l'output, $X \in R_+^n$ è il vettore (1,n) dei fattori produttivi e soddisfatte le usuali ipotesi neoclassiche, si determina il vettore dei fattori produttivi X^* che minimizza i costi ed il livello di produzione y^* che massimizza il profitto:

$$X^*(y,w)=\nabla_w C(y,w); \quad X^*(p,w)=-\nabla_w \pi(p,w); \quad Y^*(p,w)=\nabla_p \pi(p,w)$$

dove p, w sono i prezzi dell'output e dei fattori produttivi, $C(.)$ e $\pi(.)$ sono le funzioni di costo e di profitto, ∇_w ∇_p sono i vettori delle derivate di tali funzioni rispetto a w e a p.

Un' impresa inefficiente è caratterizata da un vettore (Y°,X°) diverso da quello ottimale (Y^*, X^*) ed in particolare si possono individuare quattro tipi di inefficienza: (i) <u>tecnica</u>, se $Y^\circ<f\{X^\circ,\alpha)$: il livello dell'output non è massimizzato rispetto all'impiego di X° oppure X° non è minimizzato rispetto a Y°; (ii) <u>allocativa</u> se $(df/dx_i)/(df/dx_m) \neq w_i/w_m$: non viene soddisfatta l'eguaglianza tra prezzi relativi e rapporto tra le produttività marginali; (iii) <u>di scala di produzione</u> se $p \neq dC(.)/dy$: non viene soddisfatta la condizione di massimizzazione del profitto; (iv) <u>di composizione dell'output</u> se $y_t/y_m=p_t/p_m$ nel caso di aziende multiprodotto.

3.2 Stima dei modelli non statistici parametrici.

In questi modelli si utilizzano specificazioni funzionali per la frontiera di produzione ed i parametri vengono stimati con le tecniche della programmazione lineare. Data una frontiera di tipo Cobb-Douglas 18/:

$$[1] \qquad \log y_j = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log X_i + u_j \qquad (u_j \leq 0)$$

con il vincolo $y_j \leq A \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i} \exp\{u_j\}$ senza fare ipotesi statistiche sulla distribuzione del termine erratico e ritenendo trascurabili gli errori di misurazione si possono stimare i parametri α_i, su un campione di numerosità J $(j = 1,..,J)$ utilizzando la programmazione lineare, $\mathrm{Min}\ (\sum_{j=1}^{J} |u_j|)$, e la programmazione quadratica, $\mathrm{Min}(\sum_{j=1}^{J} u_j^2)$, vincolata alla non positività dei residui.

Ottenute tali stime, che individuano i parametri della funzione di produzione del settore, vengono derivate le funzioni di produzione aziendali supponendo che la forma di queste "micro" funzioni sia uguale per tutte le imprese del settore pur se caratterizzate da un insieme di parametri δ_{ij} tipici dell'i-mo fattore produttivo nella j-ma impresa:

$$[2] \qquad y_j = A \prod_{i=1}^{n} X_{ij}^{\alpha_i \log \delta_{ij}} \exp\{u_j\} \qquad (j=1,..,J;\ i=1,..,n).$$

L'efficienza allocativa viene modellata inserendo un termine erratico, Ω_{ij}, nelle condizioni del primo ordine della massimizzazione del profitto: $w_i\ x_i = \alpha_i\ (\log \delta_{ij})\ py_i + \Omega_{ij}$.
Il limite di questa impostazione è costituito dal fatto che Ω_{ij} include anche errori di misurazione e shocks casuali e pertanto la misura dell'inefficienza allocativa risulta ambigua 19/.

3.3 Stima dei modelli statistici deterministici.

In questi modelli vengono fatte specifiche ipotesi sulla distribuzione dell'errore e vengono utilizzate procedure statistiche di stima.

Per poter generare la frontiera occorre scegliere una funzione di distribuzione asimmetrica del termine erratico quale la distribuzione gamma, beta, esponenziale, normale troncata, ecc.. Tale scelta è guidata principalmente da necessità e convenienze analitiche ed empiriche essendo tuttora carenti le conoscenze sul reale meccanismo probabilistico che genera l'inefficienza 20/.

L'applicazione dei minimi quadrati ad una funzione di produzione Cobb-Douglas e un termine erratico distribuito secondo la funzione gamma genera stime consistenti e BLUE per tutti i parametri eccetto per il termine costante la cui stima risulta distorta essendo l'unica che coinvolge la media del termine erratico. Tale distorsione è tuttavia eliminabile con una trasformazione del modello 21/.

La funzione di produzione per la j-ma impresa è rappresentata da:

$$[3] \quad y_j = A \prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\alpha_i} \; u_j \qquad (j=1,\dots,J;\; i=1,\dots,n)$$

dove $u_j=\exp(-z_j)$ è una spia dell'inefficienza e si suppone che z_j ha una distribuzione gamma, $G(z;k)$, con parametro k.

Il livello medio dell'efficienza del settore è dato da:

$$[4] \qquad \mu = E(u) = \int_0^{\infty} \exp(-z)\, G(z;k)\, dz = 2^{-k}$$

Ponendo $Y_j=\log y_j$, $X_j=\log x_{ij}$ e $a=\log A$, la trasformazione logaritmica della [3] è:

$$[5] \qquad Y_j = a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{ij} - z_j$$

dove $E(z_j)=k$, $Var(z_j)=k$ e $Cov(z_j,z_i)=0$ per $i \neq j$.

Ponendo $\alpha_0=a-k$ e $v_j=k-z_j$ la [5] si trasforma in:

$$[5'] \qquad Y_j = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_j + v_j$$

dove, essendo $E(v_j)=0$, $Var(v_j)=k$ e $Cov(v_i,v_j)=0$ per $i \neq j$ e supponendo che $E(v|X)=0$, dove $v'=(v_1,\ldots,v_J)$ $X=(x_{ij})$, sono soddisfatte tutte le ipotesi del modello classico e pertanto i minimi quadrati applicati a tale modello portano a stime non distorte: $E(\hat{\alpha}_0)=a-k$; $E(\hat{\alpha}_i)= \alpha_i$; $E(k)=\hat{k}$.

Di conseguenza $\hat{\alpha}_0+\hat{k}$ è una stima non distorta di "a" mentre $\exp(\hat{\alpha}_0 + \hat{k})$ e $\hat{\delta} =2^{-\hat{k}}$, dove $\hat{k}$ è dato dalla varianza dei quadrati della stima dei residui, sono stime con distorsione positiva ma consistenti di A e $\delta=2^{-k}$ rispettivamente.

L'applicazione del criterio di massima verosimiglianza nel modello statistico di frontiera, oltre che generare stime asintoticamente più efficienti di quelle dei minimi quadrati, è interessante per due motivi.

In primo luogo, si può verificare come, sotto certe condizioni, le stime di massima verosimiglianza coincidano con quelle ottenute con la programmazione lineare e quadratica.

Se si suppone una distribuzione esponenziale dell'errore, il logaritmo della funzione di massima verosimiglianza è dato da:

$$[6] \qquad \log L = -T \log \sigma + (1/\sigma) \sum_{j=1}^{J} (y_j-\alpha_0-\Sigma_i\ \alpha_i\ x_{ij})$$

e la sua massimizzazione rispetto ad α_0, α_i e σ equivale alla minimizzazione della somma dei residui sotto il vincolo della loro non negatività che costituisce appunto l'obiettivo della programmazione lineare.

Se invece il termine erratico è supposto distribuito secondo la funzione metà normale 22/, il logaritmo della funzione di massima verosimiglianza è:

$$[7]\quad \log L = (T/2) \log (2/\pi\sigma^2) - \sum_{j=1}^{J} (y_j-\alpha_0-\Sigma_i\alpha_i x_{ij})^2/ 2\sigma^2$$

la cui massimizzazione rispetto a α_0, α_i e σ equivale alla minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti che è l'obiettivo della programmazione quadratica.

In secondo luogo è possibile applicare, a certe condizioni, la teoria asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza. La condizione più stringente, sufficiente ma non necessaria, per l'applicabilità della teoria asintotica è l'indipendenza tra i parametri da stimare e la variabile indipendente. In generale i modelli di frontiera non soddisfano tale condizione. Tuttavia è possibile applicare la teoria asintotica se vengono soddisfatte almeno due condizioni meno restrittive relative alla funzione di distribuzione cumulata dell'errore 23/:

$$[8]\qquad F_z\big|_{z=0} = 0;$$

$$[9]\qquad (dF_z/dz)\big|_{z=0} = 0 \qquad \text{dove } F_z = dF(z)/dz$$

Poche funzioni, tra esse la gamma, hanno queste proprietà e ciò rappresenta un'ulteriore limitazione, determinata da motivi di ordine "tecnico", nella scelta della funzione di distribuzione dell'errore.

L'applicazione delle stime di massima verosimiglianza e della loro teoria asintotica genera informazioni circostanziate in merito alla stima dei parametri della distribuzione, della funzione di produzione e, ciò che è più interessante, della varianza di queste stime.

La qualità dei dati campionari utilizzati nelle analisi empiriche possono generare stime della funzione di produzione di frontiera assai simili a quelle della funzione di produzione media, nonostante la diversità strutturale dei due modelli, in base al grado di inefficienza riscontrabile nel campione. Il confronto tra le varianze delle stime di massima verosimiglianza della frontiera e dei minimi quadrati del modello classico (funzione di produzione media) è un possibile criterio per valutare l'entità di tali elementi di inefficienza.

3.4 Stima del modello stocastico ad errore composto.

Nella struttura del termine erratico dei modelli di frontiera statistici gli effetti delle variabili casuali non controllabili dall'impresa e quelli imputabili a inefficienza non vengono distinti in modo netto.

I modelli stocastici evitano tale imprecisione e la loro struttura consente di rappresentare contemporaneamente i casi in cui sono presenti: (i) errori imputabili solamente ad inefficienza dell'impresa; (ii) errori generati dalla rilevazione dei dati o da eventi casuali; (iii) entrambi questi tipi di errore.

Il modo più generale per rappresentare queste tre possibilità è di scomporre il termine erratico in due componenti (c.d. "errore composto") $\epsilon=v-u$ dove v modella l'eventualità (i) ed u il caso (ii) 24/.

Utilizzando una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas si ha, in notazione matriciale:

$$[10] \qquad Y = \alpha'X + \epsilon$$

dove Y è il (log) dell'output, α' è il vettore (1,k) dei parametri, $X=(x_{ij})$ è la matrice (n,J) dei (log) degli n inputs osservati su $j=1,\dots,J$ imprese ed $\epsilon=v-u$ è il vettore dei termini erratici. Nella quasi totalità delle analisi empiriche si suppone che l'errore sia composto dalla componente $v\sim N(0,\sigma^2_v)$ e $u\sim|N(0,\sigma^2_u)|$ distribuiti in modo indipendente 25/; talvolta per u si usa, invece della distribuzione normale troncata in zero, la distribuzione esponenziale.

L'applicazione dei minimi quadrati in questo modello porta a risultati simili a quelli visti per il modello statistico: le stime dei parametri della funzione di produzione sono non distorte, consistenti e BLUE fatta eccezione per la stima del termine costante che risulta distorta in quanto la media del termine erratico non è nulla 26/.

Sebbene asintoticamente inefficienti le stime dei minimi quadrati corretti sono consistenti e come tali possono essere utilizzate quali valori iniziali di procedure iterattive di stima.

Il metodo della massima verosimiglianza nel modello ad errore composto i cui termini sono distribuiti in modo normale e normale troncato, consente di stimare tutti i parametri rilevanti. La componente v nel termine erratico conferisce natura stocastica alla frontiera in quanto alcune osservazioni possono cadere all'esterno della frontiera c.d. "pura" determinata dalla componente u e viene garantita l'indipendenza tra osservazioni e parametri da stimare. Tutte le condizioni di regolarità necessarie per l'applicazione della teoria asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza sono pertanto soddisfatte e quindi non si incontrano quelle limitazioni nella scelta della funzione di distribuzione dell'errore viste nel modello statistico. Inoltre, la soddisfazione di tali condizioni permette l'utilizzo, salvo il caso in cui la stima di σ^2 risulti negativa, della procedura iterattiva "Two-Steps Newton-Raphson" che può utilizzare come valori iniziali le stime consistenti dei minimi quadrati corretti 27/.

3.5 Stima dell'efficienza tecnica della singola impresa.

Nei modelli ad errore composto, $\epsilon_j=v_j-u_j$, $j=1,\ldots,J$, con $v\sim N(0,\sigma^2_v)$ $u\sim|N(0,\sigma^2_u)|$ (oppure esponenziale) e indipendenti, la determinazione dell'efficienza tecnica dell'j-ma impresa richiede la stima del termine u_j. Poichè u_j è parte del termine erratico ϵ_j, è plausibile approssimare l'inefficienza tecnica tramite stime non distorte generate da: (i) stimatore lineare $-\epsilon$; (ii) predittore lineare del tipo $\delta_0+\delta_1\epsilon$; (iii) stimatore, generalmente non lineare, costituito dalla media di u condizionata dalle informazioni disponibili su ϵ, $E(u|\epsilon)$ 28/.

Questi stimatori utilizzano in modo differente il patrimonio informativo sull'inefficienza presente nel termine erratico e la natura stocastica della frontiera: il primo stimatore può essere utile nei confronti con le stime della frontiera "pura" in quanto queste ignorano gli shocks casuali (v) mentre il secondo tiene conto degli elementi stocastici ed è facilmente calcolabile 29/.

Secondo alcuni criteri 30/ lo stimatore dato dalla media condizionata si dimostra superiore ma presenta l'inconveniente di dover approssimare alcuni elementi con stime campionarie che posseggono un proprio errore -solo asintoticamente trascurabile- ed essere pertanto caratterizzato, almeno in piccoli campioni, da un'intrinseca variabilità. In sostanza la scelta fra questi possibili stimatori dipende dalle finalità empiriche dell'analisi. Se si desidera ottenere un ordinamento delle imprese in base al grado di efficienza tutti gli stimatori si equivalgono in quanto essi generano un identico ordinamento; se invece l'analisi verte sull'efficienza di un'impresa relativamente a quella di un'altra oppure sul valore assoluto di tale efficienza la media condizionata risulta superiore agli altri due stimatori.

3.6 Stima del modello duale.

L'inefficienza tecnica determina, in conseguenza della non ottimalità della composizione dei fattori produttivi, costi addizionali che possono essere stimati mediante le equazioni di domanda dei fattori 31/. L'approccio duale nei modelli di frontiera consente l'analisi congiunta dell'efficienza tecnica ed allocativa. Data una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas e le condizioni di marginalità delle domande dei fattori, il modello log-lineare per le j=1,...,J imprese del campione, risulta:

$$[11] \qquad \begin{aligned} \log y &= A+\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i + (v-u) \\ \log x_1 - \log x_i &= \log (p_i\alpha_1/p_1\alpha_i) + \Omega_i \end{aligned}$$

per gli n fattori produttivi (i = 1,..., n) e dove y rappresenta l'output, x_i l'i-mo fattore produttivo, p_i il suo prezzo di mercato. Inoltre si suppone che v ed u siano distribuiti in modo indipendente e normale [$v \sim N(0,\sigma^2_v)$ e $u \sim |N(0,\sigma^2_u)|$] mentre Ω_i è la variabile casuale, con distribuzione normale, che rappresenta l'inefficienza allocativa. Dal sistema [11] si ricava la funzione di costo di frontiera nella quale la variabile erratica riflette i costi conseguenti sia all'inefficienza tecnica che allocativa 32/.

Per quanto riguarda le procedure di stima sono possibili varie scelte. In primo luogo è possibile applicare il criterio di massima verosimiglianza direttamente al sistema [11], oppure al sistema delle equazioni di domanda dei fattori, ottenendo stime consistenti di tutti i parametri. Si possono inoltre applicare i minimi quadrati corretti alla frontiera della funzione di costo ottenendo stime consistenti per α_i; tuttavia con tale metodo è praticamente impossibile stimare σ^2_v e σ^2_u data la struttura estremamente complessa dei momenti secondo e terzo dell'errore.

Il modello duale è suscettibile di interessanti generalizzazioni. Si può supporre che l'impresa, in virtù di strategie di medio-lungo periodo, possa scegliere una composizione dei fattori sistematicamente differente da quella che minimizza i costi nel breve periodo. Tale eventualità può essere analizzata ipotizzando una media non nulla dell'errore che rappresenta l'inefficienza allocativa. Inoltre è ragionevole supporre l'esistenza di una qualche connessione tra inefficienza tecnica ed allocativa ed ipotizzare pertanto una correlazione non nulla tra u e $|\Omega|$ 33/. L'analisi di tale correlazione risulta particolarmente laboriosa in quanto la stima della matrice delle varianze-covarianze, che include ora anche i termini $\sigma_{(v,u)}$ non nulli, non è semplice, la funzione di massima verosimiglianza e le sue derivate diventano piuttosto complesse, non è più possibile ricorrere alla tecnica di concentrazione della funzione di massima verosimiglianza e, infine, aumenta considerevolmente il numero di parametri da stimare.

4. ALCUNI RISULTATI EMPIRICI

4.1 Relazione tra funzione di produzione di frontiera e funzione di produzione media.

Teoricamente esistono notevoli differenze strutturali tra la funzione di produzione media basata sulle consuete ipotesi classiche della variabile erratica e le funzioni di produzione di frontiera, specie stocastica. Alcune analisi empiriche (Tav.1) hanno tuttavia riscontrato una sostanziale uniformità delle stime della funzione di produzione media e di frontiera. Ciò è dovuto alla scarsa rilevanza degli elementi di inefficienza nelle osservazioni campionarie segnalata dall'incidenza percentuale della varianza della componente "one-sided" dell'errore nella varianza complessiva del modello 34/. Il grado di inefficienza presente nel campione dipende anche dal tipo di dati utilizzati. L'impiego di dati settoriali aggregati genera infatti un livellamento dell'inefficienza che potrebbe invece risultare maggiormente identificabile con l'utilizzo di dati a livello aziendale.

Altri risultati appaiono invece confermare una sostanziale diversità tra le funzioni, specie rispetto alla frontiera stocastica, (Fig.6) che si traduce in una difformità, sia pure non eccessiva, nel valore assoluto e nell'ordinamento delle stime dell'efficienza (Tav.2).

Tav. 1 STIMA DELLA FUNZIONE DI PRODUZIONE MEDIA, STOCASTICA (ESPONENZIALE) E PROBABILISTICA

Coeff.	Media (OLS)	Stocastica (MLE)	Probabilistica (PL) 100%	Probabilistica (PL) 97%
$\hat{\beta}_0$	1.8072	1.8143 (42.9)	1.6693	1.8828
$\hat{\beta}_1$	0.1149 (3.67)	0.1148 (3.71)	0.6015	0.2679
$\hat{\beta}_2$	0.2976 (8.85)	0.2776 (8.96)	0.4887	0.4842
$\hat{\beta}_3$	0.0606 (4.81)	0.0606 (4.87)	-	0.0099
$\hat{\beta}_4$	0.1411 (12.4)	0.1411 (12.56)	0.1334	0.1693
$\hat{\beta}_5$	0.2581 (16.72)	0.2581 (16.93)	0.2347	0.1885
$\hat{\beta}_6$	0.1956 (6.44)	0.1956 (6.52)	0.1043	0.1712
$\hat{\sigma}^2_v$		0.01005		
$\hat{\sigma}^2_u$		0.0000504		

OLS=minimi quadrati ordinari; MLE=massima verosimiglianza; PL=programmazione lineare utilizzando il 100% o il 97% dei dati. Tra parentesi è indicato il valore di t.

Fonte: AIGNER,D.-LOVELL,C.A.K.-SCHMIDT,P. (1977) Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models, "Journal of Econometrics", v.6, n.1, pp. 21-37

Tav. 2 STIMA DELL'EFFICIENZA CON FRONTIERA DI PRODUZIONE MEDIA, PURA E STOCASTICA (ESPONENZIALI)

Anni	Media (OLS)		Pura (MLE)		Stocastica (MLE)
	(a)	(b)	(a)	(b)	(b)
1964	0.81	0.80	0.82	0.78	0.90
1965	0.68	0.64	0.71	0.70	0.94
1966	0.66	0.62	0.66	0.66	0.96
1967	0.71	0.65	0.72	0.64	0.87
1968	0.78	0.59	0.72	0.61	0.87
1969	0.81	0.71	0.81	0.70	0.79
1970	0.59	0.58	0.52	0.62	0.81
1971	0.61	0.46	0.46	0.62	0.84
1972	0.63	0.54	0.62	0.64	0.79
1973	0.64	0.61	0.63	0.63	0.90

OLS=minimi quadrati ordinari; MLE=massima verosimiglianza
L'efficienza viene misurata in termini di:
- risparmio di fattori produttivi calcolato rispetto all'ipotetico impianto sull'isoquanto di produzione con un medesimo rapporto tra gli inputs (colonna (a));
- livello di produzione effettivo e quello teoricamente ottenibile sull'isoquanto efficiente a parità di rapporto tra i fattori (colonna (b)).

Fonte: BROEK VAN DEN,J.-FORSUND,F.R.-HJALMARSSON,L.-MEEUSEN,W. (1980) On the estimation of Deterministic and Stochastic Frontier Production Function. A Comparison, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp. 117-138

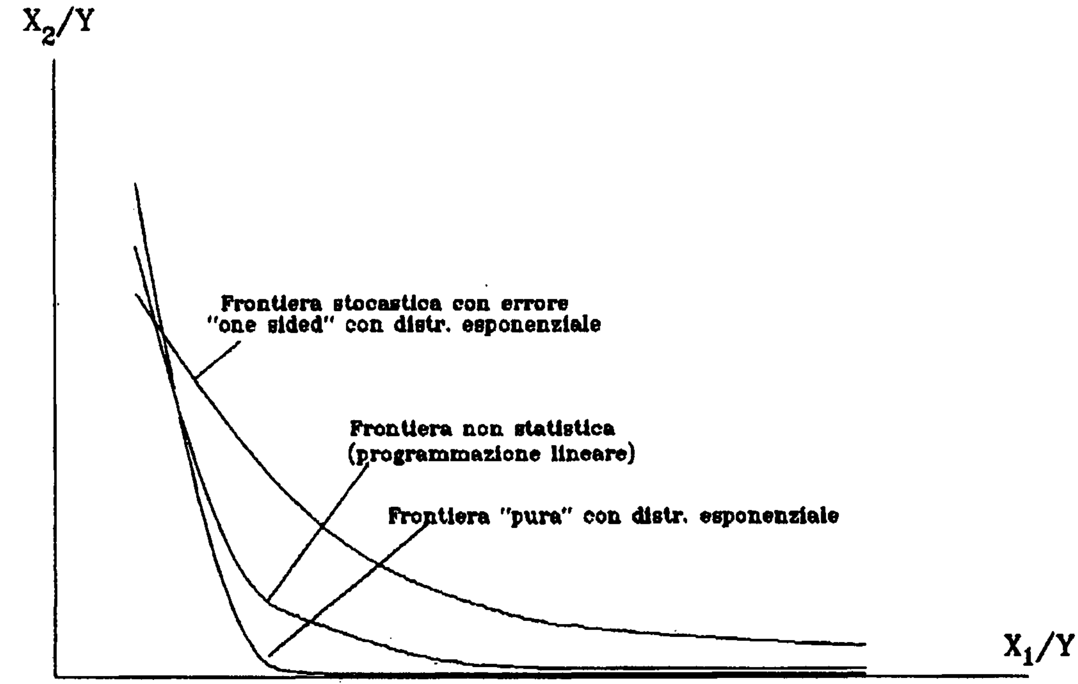

Fig. 6 [35]/

4.2 <u>Distribuzione dell'errore e procedure di stima.</u>

Nei modelli di frontiera ad errore composto la distribuzione più frequentemente usata per la componente "one-sided" è quella esponenziale o metà normale ed è possibile utilizzare il criterio della massimizzazione della funzione di verosimiglianza per discriminare tra queste due funzioni.

Applicando tale criterio la distribuzione metà normale con troncamento a zero mostrerebbe una lieve superiorità rispetto alla distribuzione esponenziale (Tav.3). Tuttavia se questo modello viene generalizzato assumendo l'ipotesi di troncamento

Tav. 3 CONFRONTO TRA FRONTIERA DI PRODUZIONE MEDIA, PURA (DISTRIBUZIONE GAMMA) E STOCASTICA

Coeff.	Media (1) OLS	Pura (2) MLE	Stocastica (1) (*) MLE (a)	(b)
$\hat{\beta}_1$	0.9146	1.4197	0.9600	0.9601
	(2.04)	(5.33)	(2.06)	(2.20)
$\hat{\beta}_2$	0.9168	0.7496	0.9105	0.9144
	(7.31)	(10.62)	(7.68)	(7.71)
$\hat{\beta}_3$	0.04164	0.0756	0.04208	0.04125
	(2.19)	(7.21)	(2.34)	(2.29)
$\hat{\sigma}^2$	0.077640	0.0387		
$\hat{\sigma}^2_u$			0.000686	0.000324
$\hat{\sigma}^2_v$			0.0692	0.0691
valore max del log. della f. di massima verosimiglianza			-2.368	-2.372

(*) Nella frontiera stocastica l'errore "one-sided" ha una distribuzione metà normale (a) oppure esponenziale (b)

OLS=minimi quadrati ordinari; MLE=massima verosimiglianza

Tra parentesi sono indicati i valori di t, per le frontiere stocastiche i t asintotici.

Fonte: (1) AIGNER,D.-LOVELL,C.A.K.-SCHMIDT,P. (1977) Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models, "Journal of Econometrics" v.6, n.1, pp. 21-37

(2) GREEN,W.H.(1980a) Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp.27-56

diverso da zero - ipotesi non rifiutata ad un livello di significatività del 99% - la distribuzione esponenziale verrebbe preferita a quella metà normale 36/.

Se la presenza di inefficienza tecnica del campione è trascurabile, oltre ad avere una sostanziale somiglianza tra funzione media e di frontiera, la bontà degli stimatori dei minimi quadrati corretti e di massima verosimiglianza è analoga. In caso contrario le stime di massima verosimiglianza risultano più efficienti ma la complessità di questa tecnica, rispetto ai più semplici minimi quadrati corretti, non sempre giustifica il miglioramento ottenibile nell'efficienza della stima.

Per piccoli campioni la procedura Two-Steps-Newton-Raphson non risulta superiore alle altre procedure. Se la numerosità campionaria è inferiore a 400 unità ed il rapporto tra le varianze $(\hat{\sigma}_u/\hat{\sigma}_v)$ è inferiore a 3,16 i minimi quadrati corretti sono preferibili. In caso contrario le stime di massima verosimiglianza risultano più efficienti 37/.

4.3 Stime dell'efficienza tecnica.

Una delle prime stime "statistiche" dell'efficienza 38/ impiega una funzione di produzione tipo Cobb-Douglas con un termine erratico exp(-z) dove z ha una distribuzione gamma con parametro k. Nella funzione di distribuzione di exp(-z) si possono allora riconoscere quattro casi (Fig.7) in base al grado di diffusione degli elementi di inefficienza all'interno della popolazione.

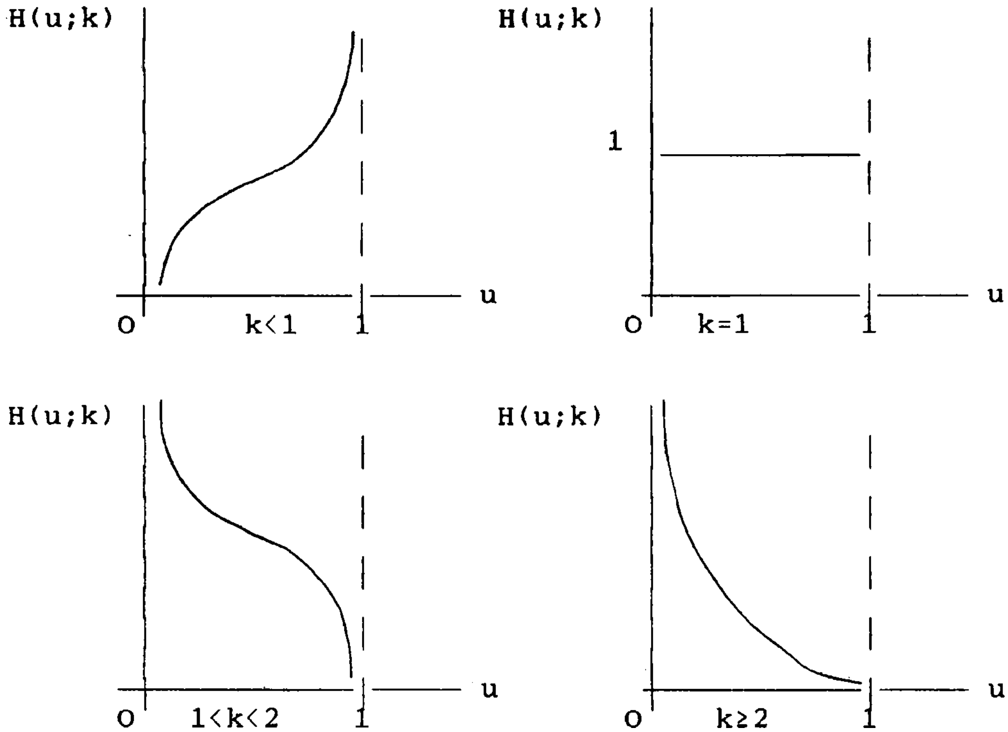

Fig.7 <u>39</u>/

Utilizzando tale modello, stimato con la procedura dei minimi quadrati córretti, si determina l'efficienza media del settore che risulta però fortemente influenzata dalla forma della distribuzione (Tav.4).

In mercati altamente concorrenziali è plausibile ottenere elevati valori di efficienza media poichè le imprese poco efficienti non possono competere con quelle più efficienti.

Al contrario bassi valori di efficienza possono essere riscontrati in mercati relativamente oligopolistici nei quali le imprese possono sostenere costi superiori al livello minimo.

La stima dell'efficienza può pertanto essere considerata segnale della struttura del mercato anche se tale struttura è

Tav. 4 STIMA DELL'EFFICIENZA CON LA FUNZIONE DI PRODUZIONE DI FRONTIERA "PURA" (*)

Settore	k	(a)	(b)
Steel Fouderies	0.063	0.957	0.799
Forniture	0.091	0.939	0.768
Fixtures	0.111	0.926	0.750
Non-Electrical Machinery	0.119	0.921	0.744
Printing	0.122	0.919	0.741
Beverages	0.127	0.916	0.737
Textiles	0.130	0.914	0.735
Clay and Glass Product	0.138	0.909	0.729
Suits, Coats and Dresses	0.139	0.908	0.728
Transport Equipment	0.142	0.906	0.726
Metal Products	0.144	0.905	0.725
Electrical Machinery	0.160	0.895	0.714
Footwear	0.162	0.894	0.713
Milk Products	0.165	0.892	0.711
Wood and Cork Products	0.168	0.890	0.709
Bakeries	0.175	0.886	0.705
Cement Products	0.189	0.877	0.697
Paper	0.208	0.866	0.687
Meat Products	0.214	0.862	0.684
Lumber Mills	0.218	0.860	0.682
Other Textile and Apparel Prod.	0.243	0.845	0.670
Canneries	0.283	0.822	0.653
Fish Oil and Meal Products	0.295	0.815	0.648
Fish-food Products	0.303	0.811	0.645
Other Chemicals	0.314	0.804	0.641
Grainmills	0.362	0.778	0.624
Industrial Chemicals	0.418	0.748	0.607
Total Manufacturing	0.203	0.869	0.689

(*) Nella colonna (b) è stata calcolata la stima della efficienza nel caso di distribuzione esponenziale. Nel caso di distribuzione Gamma, colonna (a), la stima dell'efficienza risulta pari a 2^{-k} .

Fonte: RICHMOND, J. (1974) Etimating the Efficiency of Production "International Economic Review", n.2, p.516

solo uno degli elementi generatori dell'efficienza.

Dall'efficienza media settoriale si possono ricavare informazioni sulla diffusione dell'efficienza all'interno del settore fissando un valore di riferimento e calcolando la percentuale di imprese caratterizzate da un livello di efficienza pari o superiore a questa soglia 40/.

5. CONCLUSIONI

Il concetto di funzione di produzione di frontiera rispecchia quello teorico di isoquanto di produzione e pertanto la valutazione dell'efficienza risulta economicamente più significativa di quella raggiunta attraverso la stima della funzione di produzione "media" - qualunque sia l'interpretazione economica di quest'ultimo termine - perchè l'efficienza della singola impresa viene stimata rispetto alle migliori conoscenze tecnologiche disponibili e alla migliore allocazione dei fattori dati i loro prezzi relativi.

Nei modelli di frontiera le informazioni sull'efficienza vengono individuate nel termine erratico che, come visto, può essere modellato secondo due approcci: la frontiera "pura" utilizza una distribuzione asimmetrica mentre quella "stocastica" scinde l'errore in due parti, la prima con distribuzione simmetrica, la seconda distribuita in modo asimmetrico per generare la frontiera.

Nell'approccio "puro" implicitamente si suppone che sia possibile definire l'outcome di tutte le variabili omesse e degli shocks casuali più favorevole al processo produttivo, che gli effetti di tale outcome sulle quantità prodotte siano finiti e determinabili: con queste ipotesi è possibile definire un valore massimo, non stocastico, dell'output e individuare di conseguenza l'eventuale inefficienza aziendale. La frontiera pura corrisponde esattamente alla nozione teorica dell'isoquanto di produzione ma la misura dell'efficienza risulta economicamente non del tutto corretta poichè vi sono inclusi gli effetti anche di variabili estranee al concetto stesso di efficienza.

Nell'approccio "stocastico" ad errore composto si tenta di separare le variabili che determinano l'efficienza, riassunte nella parte "one-sided" asimmetrica dell'errore, da quelle puramente casuali modellate con le distribuzioni simmetriche ed i cui effetti sull'output possono essere teoricamente infiniti. In questo approccio si definisce il livello massimo di produzione - corrispondente a quello ottenuto in condizioni di completa efficienza - che, a differenza della frontiera pura, non è deterministico ma stocastico per effetto delle variabili "unbounded". In sostanza la frontiera stocastica rappresenta una sorta di "compromesso" tra le esigenze teoriche di identificare la produzione massima ottenibile e quelle empiriche che definiscono le relazioni tra le variabili in senso probabilistico e non matematico: la frontiera pertanto non rispecchia completamente l'isoquanto di produzione ma perviene ad una stima economicamente più significativa dell'efficienza.

Nonostante i notevoli progressi compiuti nell'individuare e stimare gli elementi di inefficienza, specie con i modelli ad errore composto, le possibilità di analizzare casi più complessi ed ampliare la definizione di efficienza all'interno dei modelli tuttora esistenti appaiono limitate.

In particolare tali modelli non contemplano in modo esauriente:

a) il trade-off tra costo addizionale generato dall'inefficienza e costo di aggiustamento connesso alla sua rimozione che può rendere antieconomico il perseguimento della piena efficienza (tecnologie putty-clay o vischiosità sui mercati dei fattori);

b) il caso di razionamento dei mercati dei fattori produttivi che può rendere impossibile il raggiungimento della piena efficienza;

c) le strategie ed obiettivi di medio-lungo periodo possono consigliare l'impresa ad operare momentaneamente in condizioni non perfettamente efficienti.

Queste limitazioni sono connesse più alla struttura dei modelli che alla definizione e distribuzione del termine erratico ed appaiono pertanto superabili principalmente attraverso l'elaborazione di modelli che possano rappresentare più compiutamente le reali condizioni operative nelle quali l'agente economico deve effettuare le proprie scelte.

NOTE

1/ Numerosi sono i tentativi di definire il contenuto economico della funzione di produzione "media" per giustificare la presenza - teoricamente inaccettabile - di imprese con un livello di output superiore all'isoquanto stimato. E' stato per es. proposto il concetto di valore medio rispetto agli imputs o alla tecnologia; talvolta questa funzione di produzione è stata identificata con quella delle imprese di dimensione media oppure l'output ad essa associato è stato definito dal livello produttivo ottenibile in presenza di eventi casuali "medi" (cfr. AIGNER, D. - CHU, S.F. (1968) pp.829-830).

2/ Secondo il tipo di struttura di tali ipotesi si possono inoltre distinguere modelli di frontiera "puri" nei quali nessuna impresa può trovarsi a sinistra dell'isoquanto di produzione e "stocastici" dove tale possibilità esiste per il solo effetto della componente casuale.

3/ La correlazione tra efficienza tecnica ed allocativa viene analizzata soprattutto nel modello duale dove, oltre alla funzione di produzione, viene stimata la funzione di costo di frontiera.

4/ Queste analisi sono tuttavia ostacolate dalla struttura essenzialmente statica delle misure dell'efficienza; la formulazione di modelli di efficienza dinamica è tuttora poco esplorata.

5/ Con l'impiego di tali modelli viene dato fondamento teorico all'analisi dell'efficienza e vengono superate molte delle limitazioni dei precedenti approcci basati su indici di produttività di un unico fattore produttivo (per es. il lavoro) o di una loro media ponderata. Questi indici davano una rappresentazione parziale, se non fuorviante, dell'efficienza poichè aumenti di produttività, spesso connessi a variazioni della composizione dei fattori, non implicano necessariamente aumenti di efficienza complessiva dell'azienda.

6/ Farrell propose l'utilizzo di una funzione di produzione Cobb-Douglas (cfr. FARRELL, M.J.-FIELDHOUSE M. (1962) pp. 252-267).

7/ cfr. AIGNER, D. - CHU S.F. (1968).

8/ Il c.d. modello "probabilistico" di frontiera rappresenta il primo tentativo di ridurre la sensibilità delle stime ai valori estremi del campione consentendo ad una prefissata percentuale di osservazioni di stare oltre la frontiera. La mancanza di una possibile interpretazione economica di questa percentuale di osservazioni "fuori frontiera" rappresenta il maggior punto di debolezza di questo approccio (cfr. TIMMER, C.P. (1971) pp.776-794).

9/ cfr. AFRIAT, S.N. (1971); RICHMOND, J. (1974); SCHMIDT, P. (1976a).

10/ Una funzione di produzione e di costo stocastiche non di frontiera vennero proposte da Zellner-Kmenta-Dreze nell'ambito di un modello perfettamente concorrenziale di ottimizzazione in condizioni di incertezza. L'incertezza viene generata, oltre che da elementi casuali che influenzano il volume di produzione, dalla non istantaneità del processo di produzione-commercializzazione del prodotto che costringono l'azienda a programmare volume e prezzo offerti in funzione delle previste condizioni di mercato. Il termine erratico inserito nella funzione di produzione cattura gli elementi di inefficienza tecnica mentre quello aggiunto nelle condizioni di primo ordine della minimizzazione dei costi riassume sia l'errore previsionale che gli errori manageriali fonti di inefficineza allocativa (cfr. ZELLNER, A. - KMENTA, J. - DREZE, J. (1966)).

11/ cfr. AIGNER, D.-AMEMIYA,T.-POIRIER,D.(1976); AIGNER, D.-LOVELL,C.A.K.-SCHMIDT,P. (1977); MUEESEN,W. -VAN DEN BROEK, J. (1977).

12/ La generalità di tale modello è confermata dal fatto che se $\sigma^2_u=0$ si ottiene la c.d. frontiera "pura" dove non ci sono fattori casuali e sono presenti esclusivamente quelli di inefficienza mentre se $\sigma^2_v=0$ abbiamo una funzione di produzione la cui componente stocastica è data solo dalle componenti casuali.
Il rapporto tra le stime delle varianze $\hat{\delta}=\hat{\sigma}^2_u/\hat{\sigma}^2_v$ è un possibile criterio per valutare l'importanza relativa delle due componenti.

13/ Dalle stime dei parametri α_j si può ricavare il vettore dei residui stimati ϵ_j ma la sua decomposizione in u_j e v_j non è agevole. La media delle distribuzioni di u_j stima l'efficienza tecnica media dell'industria ma non della singola impresa (cfr. JONDROW,J.-LOVELL,C.A.K.-MATEROV,I.S.-SCHMIDT,P. (1982); WALDMAN,D.M. (1984)). L'efficienza allocativa è invece analizzabile attraverso l'approccio duale (cfr. SCHMIDT,P. - LOVELL, C.A.K. (1979), (1980); KOPP,R.T.-DIEWERT,W.E. (1982)).

14/ Tra efficienza tecnica ed allocativa esiste verosimilmente una correlazione positiva ma la sua analisi all'interno di questi modelli risulta laboriosa.

15/ Kopp e Diewert hanno decomposto l'efficienza tecnica ed allocativa utilizzando una funzione di costo di frontiera di tipo translogaritmico a quattro fattori produttivi (capitale, lavoro, energia e materiali), non omotetica, con progresso tecnologico non neutrale (cfr. KOPP,R.T. - DIEWERT,W.E. (1982)).

16/ cfr. FORSUND,F.R.- HJALMARSSON,L. (1974); KOPP, R.T. (1981b).

17/ cfr. KOPP, R.T. (1981b).

18/ cfr. AIGNER, D.-CHU, S.F. (1968).

19/ Una misurazione più corretta dell'efficienza allocativa è ottenibile inserendo un parametro h_{ij} nelle condizioni di massimizzazione del profitto: $w_{ij}\ x_i=\alpha_i h_i p y_j + \epsilon_{ij}$ dove ϵ_j è il consueto termine erratico. Se la j-ma impresa è allocativamente efficiente per tutti i fattori produttivi allora $h_{ij}=1$ per ogni i (cfr. HOCH, I. (1958)).

20/ Il primo modello statistico di frontiera venne proposto da Afriat che suggerí l'adozione della distribuzione beta in quanto asimmetrica e caratterizzata da due soli parametri e da un semplice meccanismo probabilistico (cfr. AFRIAT, S.N. (1972)).

21/ cfr. RICHMOND, J. (1974).

22/ La distribuzione metà normale entra nella categoria delle distribuzioni troncate la cui funzione di densità è ricavabile applicando le regole della probabilità condizionata:

$$f^*\{u\} = f\{u\} \ / \ \mathrm{Prob}\{u \geq c\} = f\{u\} / \int_c^{\infty} f(t)dt$$

dove C è il valore del troncamento. Per C=0 si ha:

$$f^*\{u\}=(\sqrt{2}/\sigma\sqrt{\pi})\exp\{-u^2/2\sigma^2\};\ E(u)=-\sigma(\sqrt{2}/\sqrt{\pi});\ Var(u)=\sigma^2[(\pi-2)/\pi].$$

23/ cfr. GREEN, W.H. (1980a).

24/ Il primo modello stocastico apparso in letteratura (cfr. AIGNER, D.-AMEMIYA,T.-POIRIER,D.(1976) p. 379) era basato sulla seguente struttura del termine erratico: $\epsilon_j=\epsilon^*_j/\sqrt{(1-\theta})$ se $\epsilon^*_j>0$ e $\epsilon^*_j=\epsilon^*_j/\sqrt{\theta}$ se $\epsilon^*_j\leq 0$.
ϵ^*_j sono indipendenti, con distribuzione normale a media nulla e varianza σ^2 se $0<\theta<1$ e distribuzione normale troncata positiva o negativa se $\theta=0$ e se $\theta=1$ rispettivamente. In sostanza $0<\theta<1$, che è "a measure of relative variability of observations above and below the point $\epsilon_j=0$" rappresenta un peso per poter considerare contemporaneamente i casi (i), (ii) e (iii).

25/ Nell'ipotesi che le cause dell'inefficienza siano distribuite in modo uniforme nella popolazione, il troncamento della distribuzione normale per la componente u dell'errore è, plausibilmente, il valore della moda $\mu=0$; ne consegue che f{u} è monotonicamente decrescente nello spazio $(0,+\infty)$ (cfr. AIGNER,D. - LOVELL,C.A.K.-SCHMIDT,P. (1977)). E' possibile rimuovere tale ipotesi introducendo un valore di troncamento diverso da zero ma la procedura di stima diventa più laboriosa e occorre stimare un ulteriore parametro: il valore del troncamento (cfr. STEVENSON, R.E. (1980)) pp.57-66).

26/ La trasformazione del modello, secondo le linee già esaminate del modello stocastico nel caso dei minimi quadrati corretti, porta alla stima non distorta del termine costante (cfr. AIGNER,D.- LOVELL,C.A.K.- SCHMIDT,P. (1977); OLSON,J.A. - SCHMIDT, P. - WALDMAN, D.M. (1980)).

27/ Le stime di tale procedura iterattive sono asintoticamente efficienti e la loro distribuzione asintotica è identica a quella degli stimatori di massima verosimiglianza (cfr. DHRYMES, P.J. (1970); SCHMIDT, P. (1976b)).

28/ cfr. WALDMAN, D.M. (1984) pp.355-356; JONDROW, J. - LOVELL, C.A.K. - MATEROV, I.S. - SCHMIDT, P. (1982).

29/ Questo stimatore è infatti ottenibile dai risultati della stima della frontiera di produzione in quanto $\delta_1=-Var(u)/[Var(u)+Var(v)]$ e $\delta_0=E(u)-\delta_1 E(\epsilon)=(1+\delta_0)E(u)$ (cfr. WALDMAN, D.M. (1984) p. 356).

30/ Waldam propone, per es., il criterio del coefficiente di correlazione tra la variabile da stimare (u) e i possibili stimatori (i), (ii) e (iii) (cfr. WALDMAN, D.M. (1984)).

31/ cfr. SCHMIDT,P. - LOVELL, C.A.K. (1979) pp.346-347.

32/ Tale funzione è:

$$\log C = B+(1/r)\log y+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/r)\log p_i-(1/r)(v-u)+\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i/r)\Omega_i +$$
$$+\log\left(\alpha_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i \exp\{-\Omega_i\}\right) - \log r$$

dove $r=\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i$ misura i ritorni di scala (cfr. SCHMIDT,P. - LOVELL, C.A.K. (1979) equazioni (9) e (10)).

33/ Utilizzando $|\Omega|$ in luogo di Ω non viene specificato il segno della correlazione che può pertanto essere positiva o negativa (cfr. SCHMIDT,P. - LOVELL, C.A.K. (1980)).

34/ Per stimare il grado di differenza tra funzione di frontiera e "media" si può costruire, utilizzando una distribuzione gamma dell'errore, un indice di curtosi (cfr. GREEN, W.H. (1980a)).

35/ Fonte: VAN DEN BROEK, J. et al. (1980) On the Estimation of Deterministic and Stochastic Frontier Production Functions: A Comparison, "Journal of Econometrics" v.13, n.1, pp.117-138.

36/ cfr. STEVENSON, R.E. (1980).

37/ cfr. OLSON, J.A. - SCHMIDT, P. - WALDMAN, D.M. (1980); AIGNER, D.-LOVELL, C.A.K.-SCHMIDT, P. (1977); WALDMAN, D.M. (1984).

38/ cfr. RICHMOND, J. (1974).

39/ Dato u=exp{-z} con z~G(z;k), la funzione di densità di u risulta:

$$H(u;k) = [1/\Gamma(k)] (\log 1/u)^{k-1} \quad \text{per } 0<u<1;\ k>0$$

$$H(u;k) = 0 \quad \text{altrove}$$

k<1 corrisponde approssimativamente al caso in cui molte imprese sono efficienti; k=1 al caso di distribuzione uniforme dell'efficienza tra le imprese; k>1 al caso in cui la maggior parte delle imprese è inefficiente. Fonte: RICHMOND, J. (1974) Estimating the Efficiency of Production, "International Economic Review", n.2, pp.515-521.

40/ Se l'indicatore di efficienza è dato da u=exp{-z}, dove z ha una funzione di distribuzione gamma G(z;k), la percentuale di imprese aventi un'efficienza pari o superiore al livello c (0<c<1) è data da:

$\mathrm{Prob}(u \geq c) = \mathrm{Prob}(z \leq -\log c)$ e quindi $\mathrm{Prob}(u \geq c) = \int_0^{-\log c} G(z;k)\, dz$.

cfr. RICHMOND, J. (1974) p.519.

BIBLIOGRAFIA

AFRIAT, S.N. (1972) Efficiency Estimation of Production Functions, "International Economic Review", n.3, pp.568-598

AIGNER, D.- AMEMIYA T.- POIRIER D. (1976) On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Discontinuos Density Function, "International Economic Review", n.2, pp. 377-396

----- - C.A.K. LOVÉLL - P. SCHMIDT (1977) Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models, "Journal of Econometrics", v.6, n.1, pp. 21-37

---- - S.F. CHU (1968) On Estimating the Industry Production Function, "The American Economic Review", n.4, pp. 826-835

AMEMIYA, T. (1973) Regression Analysis when the Dependent Variable is Truncated Normal, "Econometrica", n.6, pp. 997-1016

BROEK VAN DEN,J.- F.R.FORSUND - L.HJALMARSSON - W.MEEUSEN (1980), On the Estimation of Deterministic and Stochastic Frontier Production Functions. A Comparison,"Journal of Econometrics" v.13, n.1, pp. 117-138

BURGESS, D.F. (1975) Duality Theory and Pitfalls in the Specification of Technologies, "Journal of Econometrics", v.3, n.2, pp. 105-121

CHARNES, A.- W.W. COOPER (1963) Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints, "Operation Research", n.1, pp. 18-39

DEBREU, G. (1951) The Coefficient of Resource Utilization, "Econometrica", n.3, pp.273-292

DHRYMES, P.J. (1970) Econometrics: Statistical Foundation and Applications, New York, Harper and Row

FARRELL, M.J. (1957) The Measurement of Productive Efficiency, "Journal of the Royal Statistical Society" Series A(General) Part 3, pp. 253-290

----- - M.FIELDHOUSE (1962) Estimating Efficient Production Functions Under Increasing Return to Scale, "Journal of the Royal Statistical Society" Series A (General) Part 2, pp. 252-267

FÄRE, R.- C.A.K. LOVELL (1978) Measuring the Technical Efficiency of Production, "Journal of Economic Theory", n.1, pp.150-162

------ and ------ (1981) Measuring the Technical Efficiency of Production: Replay, "Journal of Economic Theory", n.3, pp. 453-454

FORSUND,F.R. - C.A.K.LOVELL - P.SCHMIDT (1980) A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement, "Journal of Econometrics", v.13, n.1 pp. 5-25

----- - L. HJALMARSSON (1974) Comment on Bo Carlsson's "The Measurement of Efficiency in Production: an application to Swedish manufacturing industries", "Swedish Journal of Economics", n.2, pp. 141-154

GREEN, W.H. (1980a) Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp. 27-56

------ (1980b) On the Estimation of a Flexible Frontier Production Model, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp. 101-115

------ (1982) Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Frontier Production Models, "Journal of Econometrics", v.18 n.2, pp. 285-289

GROSSKOPF,S. (1986) The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency, "The Economic Journal", n.382, pp. 499-513

HILDEBRAND, G. - T. LIU (1965) Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca, New York State School of Industrial and Labor Relations

HOCH, I. (1958) Simultaneous Equation Bias in the Context of the Cobb-Douglas Production Function, "Econometrica", n.4, pp. 566-578

JONDROW,J.- C.A.K. LOVELL - I.S. MATEROV - P. SCHMIDT (1982) On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model, "Journal of Econometrics" v.19, n.2/3 pp. 233-238

KOPP, R.T. (1981a) Measuring the Technical Efficiency of Production: A Comment, "Journal of Economic Theory", n.3, pp. 450-452

------ (1981b) The Measurement of Productive Efficiency: A Reconsideration, "Quaterly Journal of Economics", n.3, pp. 477-503

----- - W.E. DIEWERT (1982) The Decomposition of Frontier Cost Function Deviations into Measures of Technical and Allocative Efficiency, "Journal of Econometrics", v.19, n. 2/3, pp. 319-331

LEE, L. (1983a) A Test for Distributional Assumptions for the Stochastic Frontier Functions, "Journal of Econometrics", v.22, n.3, pp. 245-267

LEE, L. (1983b) On Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Frontier Production Models, "Journal of Econometrics", v. 23, n. 2, pp. 269-274

------ - W.G. TYLER (1978) The Stochastic Frontier Production Function and Average Efficiency: An Empirical Analysis, "Journal of Econometrics", v. 7, n. 3, pp. 385-389

MADDALA, G.S. (1983) Limited Dependent and Qualitative Variables in Econometrics, Cambridge, Cambridge University Press

MARSCHAK J.- W.H.Jr. ANDREWS (1944) Random Simultaneous Equations and the Theory of Production, "Econometrica", n.3-4, pp. 143-205

MELFI, C.A. - A.J. ROGERS (1988) A Test for the Existence of Allocative Inefficiency in Firms, "Journal of Applied Econometrics", n. 1, pp. 69-80

MUEESEN, W. - J.VAN DEN BROEK (1977) Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error, "International Economic Review", n.2, pp. 435-444

OLSON, J.A. - P. SCHMIDT - D.M. WALDMAN (1980) A Monte Carlo Study of Estimators of Stochastic Frontier Production Functions, "Journal of Econometrics", v.13, n. 1, pp. 67-82

RICHMOND, J. (1974) Estimating the Efficiency of Production, "International Economic Review", n.2, pp. 515-521

SCHMIDT, P. (1976a) On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions, "The Review of Economics and Statistics", n.2, pp. 238-239

------- (1976b) Econometrics, New York, Marcel Dekker

------ - C.A.K. LOVELL (1979) Estimating Technical and Allocative Inefficiency Relative to Stochastic Production and Cost Frontiers, "Journal of Econometrics", v.9, n.3, pp. 343-366

------ and ------ (1980) Estimating Stochastic Production and Cost Frontiers when Technical and Allocative Inefficiency are Correlated, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp.83-100

SENGUPTA, J.K. - R.E. SFEIR (1988) Efficiency Measurement by Data Envelopment Analysis with Econometric Applications, "Applied Economics", n.3, pp. 285-293

STEVENSON, R.E. (1980) Likelihood Functions for Generalized Stochastic Frontier Estimation, "Journal of Econometrics", v.13, n.1, pp. 57-66

STIGLER, G.J. (1976). The Existence of X-Efficiency, "The American Economic Review", n.1, pp. 213-216

TIMMER, C.P. (1971) Using a Probabilistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency, "Journal of Political Economy", n.4, pp. 776-794

WALDMAN, D.M. (1984) Properties of Technical Efficiency Estimators in the Stochastic Frontier Model, "Journal of Econometrics", v.25, n.3, pp. 353-364

ZELLNER, A. - J.KMENTA - J.DREZE (1966) Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models, "Econometrica", n.4, pp.784-795

ELENCO DEI PIÙ RECENTI TEMI DI DISCUSSIONE (*)

n. 102 — *Alcune considerazioni sugli effetti di capitalizzazione determinati dalla tassazione dei titoli di Stato,* di D. FRANCO - N. SARTOR (luglio 1988).

n. 103 — *La coesione dello SME e il ruolo dei fattori esterni: un'analisi in termini di commercio estero,* di L. BINI SMAGHI - S. VONA (luglio 1988).

n. 104 — *Stime in tempo reale della produzione industriale,* di G. BODO - A. CIVIDINI - L. F. SIGNORINI (luglio 1988).

n. 105 — *On the difference between tax and spending policies in models with finite horizons,* di W. H. BRANSON - G. GALLI (ottobre 1988).

n. 106 — *Non nested testing procedures: Monte Carlo evidence and post simulation analysis in dynamic models,* di G. PARIGI (ottobre 1988).

n. 107 — *Completamento del mercato unico. Conseguenze reali e monetarie,* di A. FAZIO (ottobre 1988).

n. 108 — *Modello mensile del mercato monetario,* (ottobre 1988).

n. 109 — *Il mercato unico europeo e l'armonizzazione dell'IVA e delle accise,* di C. A. BOLLINO - V. CERIANI - R. VIOLI (dicembre 1988).

n. 110 — *Il mercato dei contratti a premio in Italia,* di E. BARONE - D. CUOCO (dicembre 1988).

n. 111 — *Delegated screening and reputation in a theory of financial intermediaries,* di D. TERLIZZESE (dicembre 1988).

n. 112 — *Procedure di destagionalizzazione dei depositi bancari mensili in Italia,* di A. CIVIDINI - C. COTTARELLI (gennaio 1989).

n. 113 — *Intermediazione finanziaria non bancaria e gruppi bancari plurifunzionali: le esigenze di regolamentazione prudenziale,* (febbraio 1989).

n. 114 — *La tassazione delle rendite finanziarie nella CEE alla luce della liberalizzazione valutaria* (febbraio 1989).

n. 115 — *Il ruolo delle esportazioni nel processo di crescita e di aggiustamento dei PVS,* di L. BINI SMAGHI - D. PORCIANI - L. TORNETTA (marzo 1989).

n. 116 — *LDCs' repayment problems: a probit analysis,* di F. DI MAURO - F. MAZZOLA (maggio 1989).

n. 117 — *Mercato interbancario e gestione degli attivi bancari: tendenze recenti e linee di sviluppo,* di G. FERRI - P. MARULLO REEDTZ (giugno 1989).

n. 118 — *La valutazione dei titoli con opzione di rimborso anticipato: un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross ai CTO,* di E. BARONE - D. CUOCO (giugno 1989).

n. 119 — *Cooperation in managing the dollar (1985-87): interventions in foreign exchange markets and interest rates,* di E. GAIOTTI - P. GIUCCA - S. MICOSSI (giugno 1989).

n. 120 — *The US current account imbalance and the dollar: the issue of the exchange rate pass-through,* di C. MASTROPASQUA - S. VONA (giugno 1989).

n. 121 — *On incentive-compatible sharing contracts,* di D. TERLIZZESE (giugno 1989).

n. 122 — *The adjustment of the US current account imbalance: the role of international policy coordination,* di G. GOMEL, G. MARCHESE - J.C. MARTINEZ OLIVA (luglio 1989).

n. 123 — *Disoccupazione e dualismo territoriale,* di G. BODO - P. SESTITO (agosto 1989).

n. 124 — *Redditi da lavoro dipendente: un'analisi in termini di capitale umano,* di L. CANNARI G. PELLEGRINI - P. SESTITO (settembre 1989).

n. 125 — *On the estimation of stochastic differential equations: the continuous-time maximum-likelihood approach,* di R. CESARI (settembre 1989).

(*) I «Temi» possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.

BANCA D'ITALIA - CENTRO STAMPA