

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

**La valutazione dei titoli con opzione di rimborso anticipato:
un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross ai CTO**

di Emilio Barone e Domenico Cuoco



Numero 118 - Giugno 1989

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

**La valutazione dei titoli con opzione di rimborso anticipato:
un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross ai CTO**

di Emilio Barone e Domenico Cuoco

Numero 118 - Giugno 1989

La serie «Temi di discussione» intende promuovere la circolazione, in versione provvisoria, di lavori prodotti all'interno della Banca d'Italia o presentati da economisti esterni nel corso di seminari presso l'Istituto, al fine di suscitare commenti critici e suggerimenti.

I lavori pubblicati nella serie riflettono esclusivamente le opinioni degli autori e non impegnano la responsabilità dell'Istituto.

COMITATO DI REDAZIONE: *IGNAZIO ANGELONI, FRANCESCO M. FRASCA, LUIGI GUIZO, STEFANO VONA; MARIA ANTONIETTA ORIO (segretaria).*

SOMMARIO

I Certificati del Tesoro con opzione di rimborso anticipato (CTO) rappresentano il primo esempio in Italia di titoli riscattabili/estensibili (retractable/extendible bonds), da tempo noti sul mercato canadese e di recente diffusione anche sull'euromercato. In questo lavoro, il modello di Cox, Ingersoll e Ross ad un fattore è stato utilizzato per determinare il valore di equilibrio dei CTO alla data della prima emissione. La simulazione degli effetti di modifiche nelle loro caratteristiche contrattuali offre utili indicazioni sul disegno ottimale di questi titoli.

INDICE

1. INTRODUZIONE	p. 5
2. LE CARATTERISTICHE DEI CTO	5
3. I CTO COME EXTENDIBLE/RETRACTABLE BONDS	7
4. STRATEGIA OTTIMALE PER L'ESERCIZIO DELL'OPZIONE	10
5. IL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS	10
5.1. Un modello di equilibrio	10
5.2. La valutazione dei titoli obbligazionari	12
5.3. La valutazione dei titoli derivati	13
6. LA VALUTAZIONE DEI CTO	14
6.1. Stima dei parametri del modello	14
6.2. Il metodo delle differenze finite	15
6.3. Risultati	16
7. L'EFFETTO DELLE CARATTERISTICHE CONTRATTUALI SUL VALORE DEI CTO	22
7.1. Prezzo di esercizio dell'opzione	22
7.2. Data di esercizio dell'opzione	23
7.3. Scadenza del titolo	24
7.4. Tasso nominale	25
7.5. Conclusioni	26
APPENDICE	27
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	29

1. - Introduzione

I Certificati del Tesoro con Opzione (CTO), emessi il 1° dicembre 1988, sono ordinari titoli a tasso fisso a 8 anni provvisti di un'opzione che attribuisce al portatore il diritto di richiedere il rimborso anticipato alla fine del quarto anno.

Nel seguito, dopo avere descritto le caratteristiche dei CTO (§ 2), viene mostrato come essi possano essere considerati titoli a 4 anni forniti di un'opzione call o titoli a 8 anni forniti di un'opzione put (§ 3). Questo schema di analisi viene utilizzato per derivare alcune restrizioni di arbitraggio sul valore dei CTO e per individuare la strategia ottimale di esercizio della facoltà di rimborso anticipato (§ 4).

Il § 5 fornisce quindi una breve descrizione del modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR), nella sua formulazione ad un fattore. Questo modello, sviluppato in un contesto di equilibrio generale, consente di valutare ogni attività finanziaria il cui prezzo dipenda esclusivamente dalla corrente struttura dei rendimenti per scadenza. Dopo aver ottenuto le stime di massima verosimiglianza dei parametri, il modello CIR è stato quindi utilizzato per determinare il valore dei CTO alla data di emissione (§ 6). Nel § 7 sono infine riportati i risultati di alcune simulazioni dirette ad analizzare gli effetti sul valore dei CTO di diverse specificazioni relative al prezzo di rimborso anticipato, alla data di esercizio della facoltà di rimborso anticipato, alla scadenza e al tasso nominale dei titoli.

2. - Le caratteristiche dei CTO

L'emissione dei primi Certificati del Tesoro con opzione di rimborso anticipato è stata annunciata dal Ministro del Tesoro con decreto del 22 novembre 1988. Questi titoli hanno tasso

cedolare pari al 10,25 per cento, pagabile il 1° giugno e il 1° dicembre di ogni anno in due rate semestrali posticipate di 5,125 (4,4845 al netto della ritenuta fiscale del 12,5 per cento), godimento 1° dicembre 1988 e rimborso in unica soluzione alla pari (99,375 per cento al netto della ritenuta fiscale sul premio di rimborso) dopo 8 anni (1° dicembre 1996). I portatori dei certificati hanno la facoltà di ottenerne il rimborso anticipato dopo 4 anni, nel periodo dal 1° al 10 dicembre 1992, facendo pervenire l'apposita domanda alle filiali della Banca d'Italia nel periodo dal 1° al 10 novembre del 1992.¹

I CTO sono stati collocati con il sistema dell'asta marginale (o a prezzo uniforme), che prevede l'assegnazione dei certificati al prezzo meno elevato tra quelli offerti dai concorrenti rimasti aggiudicatari; il prezzo base di collocamento (ossia il prezzo minimo fissato dal Tesoro per l'accoglimento delle richieste) è stato di 95 lire per ogni 100 di capitale nominale. Le offerte degli operatori ammessi a partecipare all'asta (Banca d'Italia, aziende di credito e loro istituti centrali di categoria, società finanziarie iscritte all'albo) dovevano pervenire alla Banca d'Italia entro le ore 12,30 del 29 novembre 1988.

Il prezzo di aggiudicazione dei certificati è stato pari al prezzo base (95). L'importo emesso (1.500 miliardi) è risultato solo parzialmente sottoscritto (444 miliardi dagli operatori e 150 dalla Banca d'Italia). Il regolamento delle sottoscrizioni è stato effettuato il 1° dicembre 1988 al prezzo di aggiudicazione (senza versamento di dietimi).

1. La preventiva comunicazione della richiesta di rimborso nel periodo dal 1° al 10 novembre è necessaria per ottenere il rimborso anticipato, pur senza risultare vincolante per il richiedente.

3. - I CTO come Extendible/Retractable Bonds

I CTO consentono al sottoscrittore di trarre profitto da un ribasso dei tassi d'interesse (essendo titoli a tasso nominale fisso) e lo proteggono nello stesso tempo dalle perdite in conto capitale associate ad un eventuale rialzo dei tassi (tramite la facoltà di rimborso anticipato). Essi costituiscono il primo esempio in Italia di titoli riscattabili/estensibili (retractable/extendible bonds), da tempo noti sul mercato canadese e di recente diffusione anche sull'euromercato: i CTO possono, infatti, essere visti indifferentemente come titoli a 8 anni, provvisti di un'opzione put che consente di vendere il titolo alla fine del quarto anno², ad un prezzo di esercizio pari al valore nominale (retractable bonds), o come titoli a 4 anni, provvisti di un'opzione call che consente di acquistare alla pari un ulteriore titolo a quattro anni (extendible bonds).

Più in generale, per un retractable/extendible bond la cui opzione abbia prezzo di esercizio K , scadenza T e si riferisca ad un'obbligazione rimborsabile al tempo s , risulta:

$$\begin{aligned} [1] \quad W(t, K, T, s, T_n) &= B(t, s, T_n) + p(t, K, T, s, T_n) = \\ &= B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0) + c(t, K, T, s, T_n) \end{aligned}$$

dove

$W(t, K, T, s, T_n)$: è il valore al tempo t di un retractable/extendible con tasso nominale T_n , la cui opzione abbia prezzo di esercizio K , scadenza T e si riferisca ad un'obbligazione rimborsabile al tempo s ($s \geq T \geq t$);

$B(t, s, T_n)$: è il valore al tempo t di un'obbligazione con

2. Data la brevità del periodo di esercizio, si può assumere a fini espositivi che l'opzione di rimborso anticipato sia esercitabile ad un'unica data (opzione europea) piuttosto che in un intervallo di tempo (opzione americana).

tasso nominale T_n , scadenza al tempo s e valore nominale unitario;

$c(t, K, T, s, T_n)$: è il valore al tempo t di una call option, con prezzo di esercizio K e scadenza T , avente per oggetto una obbligazione con tasso nominale T_n e scadenza s ;

$p(t, K, T, s, T_n)$: è il valore al tempo t di una put option, con prezzo di esercizio K e scadenza T , avente per oggetto una obbligazione con tasso nominale T_n e scadenza s .

L'uguaglianza tra gli ultimi due membri della [1] deriva dalla put-call parity per bond options europee (cioè esercitabili solo alla scadenza):

$$[2] \quad c(t, K, T, s, T_n) = p(t, K, T, s, T_n) + B(t, s, T_n) - B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0)^3.$$

Per dimostrare la relazione [2], si consideri il portafoglio formato: (1) acquistando una call e vendendo una put (entrambe con prezzo di esercizio K e scadenza T) aventi per oggetto un'obbligazione con tasso nominale T_n e scadenza s , (2) vendendo un'obbligazione con scadenza s e acquistando un'obbligazione con scadenza T (entrambe con tasso nominale T_n), e (3) acquistando $K-1$ pure discount bonds con scadenza T . Questo portafoglio determina un flusso di cassa nullo da t a T (gli interessi percepiti sull'obbligazione acquistata sono esattamente sufficienti a coprire gli interessi da corrispondere sull'obbligazione venduta) ed ha un valore finale nullo al tempo T (tav. 1). Pertanto, anche il suo valore corrente deve essere nullo:

3. Nel caso particolare di opzioni su pure discount bonds, la put-call parity si riduce alla seguente espressione:

$$c(t, K, T, s, 0) = p(t, K, T, s, 0) + B(t, s, 0) - KB(t, T, 0).$$

$$c(t, K, T, s, T_n) - p(t, K, T, s, T_n) - B(t, s, T_n) + B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0) = 0$$

(C.V.D.).

Tav. 1

Dimostrazione della relazione di arbitraggio
 $c(t, K, T, s, T_n) = p(t, K, T, s, T_n) + B(t, s, T_n) - B(t, T, T_n) - (K-1)B(t, s, 0)$

Valore corrente del portafoglio	Valore finale del portafoglio alla data di scadenza delle opzioni (T)	
	$B(T, s, T_n) \leq K$	$B(T, s, T_n) > K$
$c(t, K, T, s, T_n)$	0	$B(T, s, T_n) - K$
$- p(t, K, T, s, T_n)$	$B(T, s, T_n) - K$	0
$- B(t, s, T_n)$	$-B(T, s, T_n) - T_n$	$-B(T, s, T_n) - T_n$
$+ B(t, T, T_n)$	$1 + T_n$	$1 + T_n$
$+ (K-1)B(t, T, 0)$	$K-1$	$K-1$
	0	0

In base alla [2], si può notare che quanto più $B(t, s, T_n)$ risulta minore di $B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0)$, tanto meno vale l'opzione call rispetto alla put; in particolare, quanto più la curva dei rendimenti risulta crescente in funzione della scadenza tanto minore è il valore dell'opzione call.

Inoltre, poiché il valore di una opzione call o put è comunque non negativo, si ha dalla [1]:

$$W(t, K, T, s, T_n) \geq B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0)$$

e

$$W(t, K, T, s, T_n) \geq B(t, s)$$

da cui

$$[3] \quad W(t, K, T, s, T_n) \geq \max[B(t, T, T_n) + (K-1)B(t, T, 0), B(t, s)].$$

La precedente relazione implica, in particolare, che in assenza di opportunità di arbitraggio, i CTO, equivalenti ad un

retractable/extendible con prezzo di esercizio alla pari ($K=1$) devono avere un prezzo non inferiore al maggiore tra il prezzo di un titolo a quattro anni e quello di un titolo ad otto anni.

L'opzione accordata al sottoscrittore consente pertanto all'emittente di collocare i titoli ad un prezzo più elevato (o ad un tasso nominale inferiore) di quello che sarebbe richiesto per un ordinario titolo a reddito fisso di pari scadenza.

4. - Strategia ottimale per l'esercizio dell'opzione

La relazione [1] consente di definire immediatamente la strategia ottimale di esercizio di un retractable/extendible ed il valore del titolo alla data T di esercizio dell'opzione. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} [4] \quad W(T, K, T, s, T_n) &= 1 + (K-1) + \max[B(T, s, T_n) - K, 0] = \\ &= B(T, s, T_n) + \max[K - B(T, s, T_n), 0] = \\ &= \max[B(T, s, T_n), K]. \end{aligned}$$

La [4] implica che, alla fine del quarto anno, il sottoscrittore dei CTO opterà per il rimborso anticipato se il prezzo corrente di un titolo a 4 anni con tasso cedolare del 5,125 per cento semestrale è inferiore alla pari (ossia se il tasso di mercato per la scadenza quadriennale risulta superiore al 10,51 per cento). A quella data, se non rimborsati, i CTO avranno un prezzo superiore alla pari.

5. - Il modello di Cox, Ingersoll e Ross

5.1. - Un modello di equilibrio

La valutazione di un retractable/extendible bond richiede la specificazione di un modello di equilibrio del mercato obbligazionario.

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR), che fornisce, in un contesto di equilibrio generale, la struttura dei rendimenti per scadenza, rappresenta un importante punto di riferimento per la moderna teoria finanziaria.⁴ Nella sua formulazione ad un solo fattore, questo modello assume che:

- 1) il tasso d'interesse istantaneo (r) segua un processo mean-reverting descritto dall'equazione differenziale stocastica

$$[5] \quad dr = \kappa(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

dove κ è la velocità di aggiustamento del tasso d'interesse r verso la sua media di lungo periodo μ , $\sigma^2 r$ è la varianza istantanea di dr e dz è un processo di Wiener standardizzato;

- 2) il rendimento istantaneo atteso di obbligazioni di qualsiasi scadenza sia pari al tasso d'interesse r maggiorato di un premio al rischio (Local Expectations Hypothesis)

$$[6] \quad E[dB/B] = r + \lambda r B_r / B$$

dove $-\lambda$ è il prezzo di mercato del rischio e $r B_r / B$ rappresenta l'elasticità del prezzo (B) dell'obbligazione rispetto ad r ;

- 3) valgano le consuete ipotesi di mercati perfetti.

Date queste assunzioni, si può dimostrare che il valore $H=H(r,t,T)$ di una qualsiasi attività finanziaria che dipenda esclusivamente dalla corrente struttura dei rendimenti segue (nell'intervallo tra lo stacco di due cedole successive)

4. Cfr. J. Cox, J. Ingersoll e S. Ross (1985).

l'equazione differenziale stocastica

$$[7] \quad \frac{1}{2} \sigma^2 r H_{rr} + [\kappa(\mu - r) - \lambda r] H_r + H_t - rH = 0.$$

Questa equazione può essere risolta una volta imposta l'appropriata boundary condition per $H(r, T, T)$, determinata dalle caratteristiche proprie di ogni singola attività finanziaria.

5.2. - La valutazione dei titoli obbligazionari

Per il prezzo $P(t, T) = B(t, T, 0)$ di un pure discount bond con vita residua $\tau = T - t$, la soluzione dell'equazione [7], soggetta alla boundary condition

$$[8] \quad P(T, T) = 1$$

è

$$[9] \quad P(t, T) = F(t, T) e^{-G(t, T)r}$$

dove

$$[10] \quad F(t, T) = \left[\frac{\phi_1 e^{\phi_2 \tau}}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \right]^{\phi_3}$$

$$[11] \quad G(t, T) = \left[\frac{(e^{\phi_1 \tau} - 1)}{\phi_2 (e^{\phi_1 \tau} - 1) + \phi_1} \right]$$

La [9] esprime il valore di un pure discount bond di durata τ in funzione della variabile di stato r e dei tre parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , dove:

$$[12] \quad \phi_1 = \sqrt{[(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2]}$$

$$[13] \quad \phi_2 = (\kappa + \lambda + \phi_1)/2$$

$$[14] \quad \phi_3 = 2\kappa\mu/\sigma^2.$$

Dalla [9] è possibile derivare l'intera struttura dei rendimenti, dato che il tasso d'interesse al tempo t per la scadenza T , $R(t, T)$, è pari a:

$$R(t, T) = - \ln[P(t, T)]/\tau.$$

Quando $T \rightarrow 0$ si ha $R(t, 0) \rightarrow r$, mentre per $T \rightarrow \infty$ si ha:

$$[15] \quad R(t, \infty) \rightarrow (\phi_1 - \phi_2)\phi_3.$$

Noti i fattori di sconto $P(t, T)$, il valore corrente di un qualsiasi coupon bond con rimborso in unica soluzione al tempo T è espresso da:

$$[16] \quad B(t, T, T_n) = \sum_{i=1}^n C_i P(t, t_i) + P(t, T)$$

dove $C_i = C_i(T_n)$ è la cedola corrisposta al tempo t_i ($t < t_i \leq t_n = T$).

5.3. - La valutazione dei titoli derivati

Per una opzione call su un coupon bond, l'equazione differenziale [7] deve essere risolta imponendo la boundary condition

$$[17] \quad c(T, K, T, s, T_n) = \max[B(T, s, T_n) - K, 0].$$

Per un'opzione put, la corrispondente boundary condition è espressa da:

$$[18] \quad p(T, K, T, s, T_n) = \max[K - B(T, s, T_n), 0].$$

Per un retractable/extendible si ha:

$$[19] \quad W(T, K, T, s, T_n) = \max[B(T, s, T_n), K].$$

In questi casi, non esistono tuttavia soluzioni in forma chiusa e la [7] deve essere risolta numericamente.

6. - La valutazione dei CTO

6.1. - Stima dei parametri del modello

La stima dei parametri del modello CIR può essere effettuata seguendo un duplice approccio. Nell'approccio a due stadi vengono stimati dapprima i parametri β , μ e σ del processo [5] seguito dal tasso d'interesse istantaneo, utilizzando la serie storica di un tasso a breve, e quindi λ sulla base dell'equazione [16].⁵ Nell'approccio ad un solo stadio i parametri del modello (e la variabile di stato r) sono invece determinati simultaneamente sulla base dell'equazione [16], utilizzando una procedura di regressione non lineare o il metodo generalizzato dei momenti.⁶

L'approccio ad un solo stadio mediante regressione non lineare consente di stimare i parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 definiti dalle relazioni [12], [13] e [14], ma non di ottenere stime separate per β , μ e λ . Peraltro, σ^2 può essere determinato attraverso la relazione:

5. Cfr. A. Ananthanarayanan e E. Schwartz (1980). Per una applicazione al mercato italiano dell'approccio a due stadi cfr. E. Barone e R. Cesari (1986).

6. Per la stima mediante regressione non lineare cfr. S. Brown - P. Dybvig (1986) e R. Brown - S. Schaefer (1988). Per la stima con il metodo dei momenti cfr. M. Gibbons - K. Ramaswamy (1986).

$$[20] \quad \sigma^2 = 2(\phi_1\phi_2 - \phi_2^2).$$

D'altra parte, il metodo dei momenti risulta di difficile applicazione per il caso di titoli provvisti di cedole.⁷ Pertanto, nell'analisi successiva, i parametri del modello CIR sono stati ottenuti mediante regressione non lineare (metodo di Marquardt), minimizzando la somma dei quadrati degli scarti tra i prezzi dei BTP quotati sul mercato secondario e i prezzi teorici risultanti dall'equazione [16].

Si è a tal fine ipotizzato che gli scarti tra prezzi effettivi e prezzi teorici siano indipendenti tra loro e normalmente distribuiti, con media zero e varianza proporzionale alle derivate dei prezzi dei titoli rispetto ai rendimenti a scadenza (ossia ai prodotti tra le duration e i rispettivi corsi tel quel). Pertanto, le stime sono state effettuate con i minimi quadrati generalizzati, dividendo entrambi i membri della equazione [16] per la radice quadrata delle derivate.

6.2. - Il metodo delle differenze finite

L'equazione differenziale [7] può essere riscritta in funzione dei parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , oltre che della variabile di stato r , utilizzando le definizioni [12], [13] e [14]. Tenendo presente la [20], si ha:

$$[21] \quad \frac{1}{2}\sigma^2 r H_{rr} + [\frac{1}{2}\sigma^2 \phi_3 - (2\phi_2 - \phi_1)r] H_r + H_t - rH = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale [21], soggetta alle appropriate boundary conditions, è stata approssimata utilizzando il metodo (esplicito) delle differenze finite.⁸ A tal

7. Si veda al riguardo Gibbons e Ramaswamy (1986)

8. Cfr. M. Brennan - E. Schwartz (1977, 1978) e R. Geske - K. Shastri (1985).

fine, il campo di definizione della [21] nello spazio (r, t) è stato suddiviso in una griglia $(n \times m)$ caratterizzata da incrementi discreti di r pari a h e di t pari a k . I valori di $H(r, t)$ sono stati approssimati da $H_{i,j} = H(ih, jk)$, con $i=0, 1, 2, \dots, n$ e $j=0, 1, 2, \dots, m$, e le derivate parziali dalle seguenti differenze finite:

$$[22] \quad H_r = (H_{i+1,j+1} - H_{i-1,j+1}) / (2h)$$

$$[23] \quad H_{rr} = (H_{i+1,j+1} - 2H_{i,j+1} + H_{i-1,j+1}) / h^2$$

$$[24] \quad H_t = (H_{i,j+1} - H_{i,j}) / k.$$

Sostituendo le equazioni [22], [23] e [24] nella [21] si ottiene la seguente approssimazione alle differenze finite

$$[25] \quad H_{i,j} = (aH_{i-1,j+1} + bH_{i,j+1} + cH_{i+1,j+1}) / (1 + rk) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, m-1 \end{matrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= \{ \frac{1}{2} \sigma^2 r / h^2 - [\frac{1}{2} \sigma^2 \phi_3 - (2\phi_2 - \phi_1) r] / (2h) \} k \\ b &= 1 - \sigma^2 r k / h^2 \\ c &= \{ \frac{1}{2} \sigma^2 r / h^2 + [\frac{1}{2} \sigma^2 \phi_3 - (2\phi_2 - \phi_1) r] / (2h) \} k. \end{aligned}$$

L'equazione [25] può essere risolta iterativamente iniziando da $H(r, T) = H_{i,m}$.

6.3. - Risultati

I parametri del modello di Cox, Ingersoll e Ross sono stati stimati sulla base dei prezzi (tel quel) dei BTP negoziati sul mercato secondario (Borsa Valori di Milano e circuito telematico) il 28 novembre 1988, con valuta 1 dicembre.

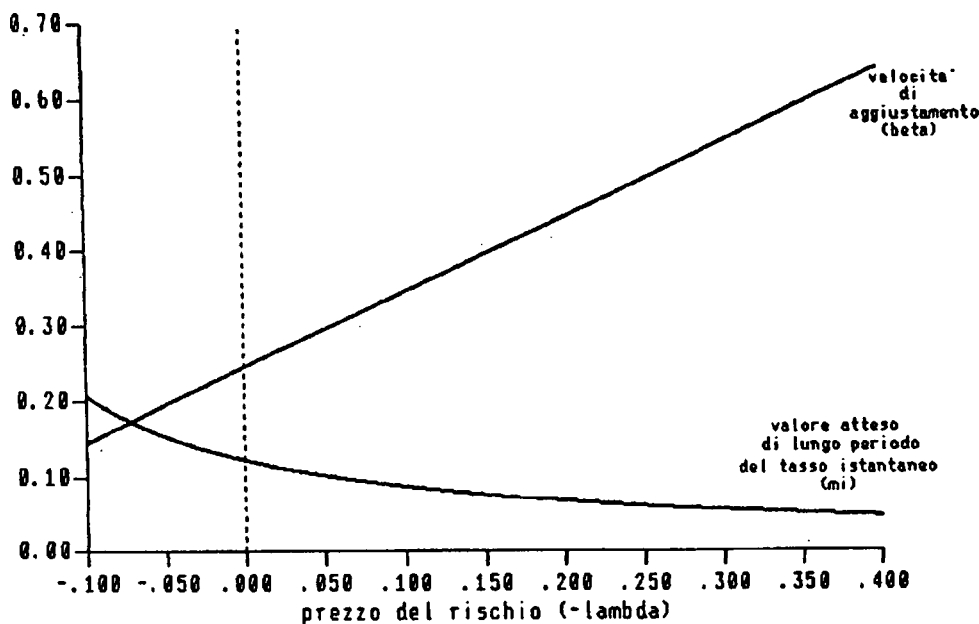
Le stime ottenute erano pari a 0,09634 per il tasso d'interesse istantaneo r e a 0,25881, 0,25124 e 15,511 per i parametri ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , rispettivamente. Il valore di σ , ottenuto

in base alla [20], risultava pari a 0,0617, implicando una deviazione standard del tasso istantaneo (σ/r) pari a 0,01914.

Come già accennato, i parametri originari del modello β , μ e λ non possono essere determinati separatamente sulla base di ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . Tuttavia, per ogni possibile valore di uno dei tre parametri si può ottenere il valore degli altri due. In particolare, per un valore di λ uguale a zero (che implica un premio al rischio nullo) la velocità di aggiustamento β e il valore atteso di lungo periodo μ del tasso istantaneo r risultano pari, rispettivamente, a 0,24367 e 0,12107; per valori di λ negativi (ossia per premi al rischio positivi), β aumenta mentre μ diminuisce (figg. 1-3).

Fig. 1

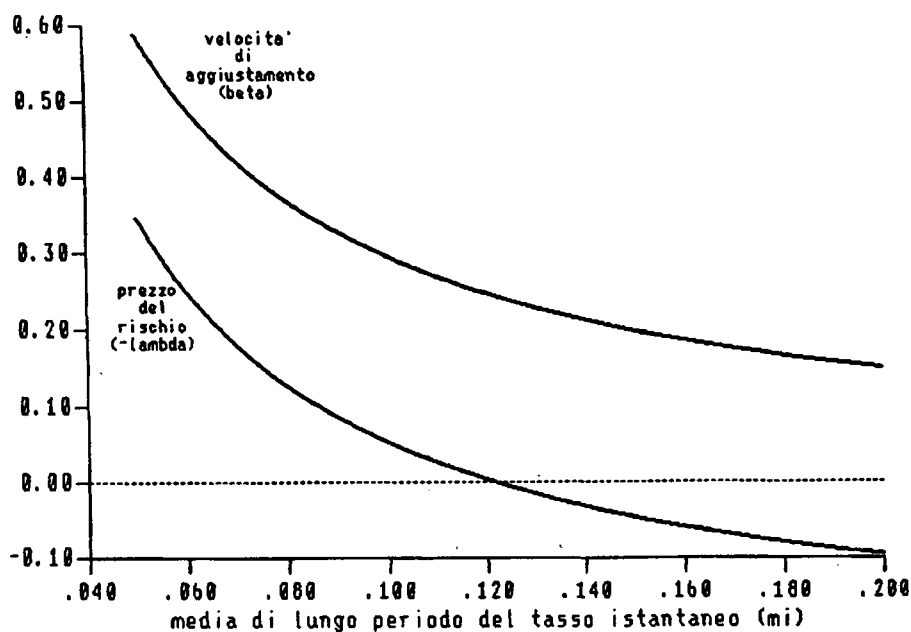
PARAMETRI DEL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS



Nota: le curve sono state ottenute sulla base dei valori di f_1 , f_2 e f_3 stimati (0,25881, 0,25124, 15,511).

Fig. 2

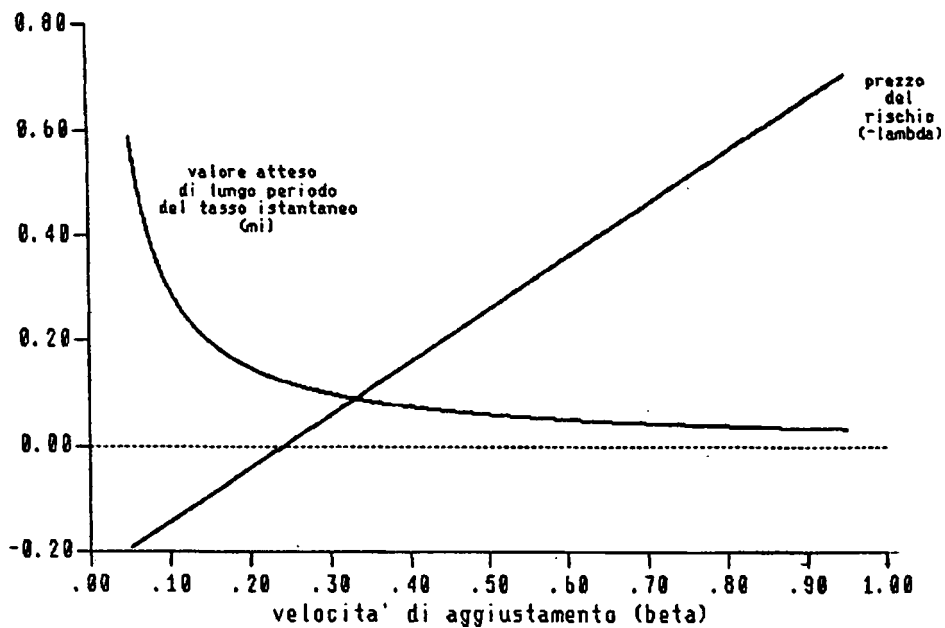
PARAMETRI DEL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS



Nota: le curve sono state ottenute sulla base dei valori di f_1 , f_2 e f_3 stimati (0,25881, 0,25124, 15,511).

Fig. 3

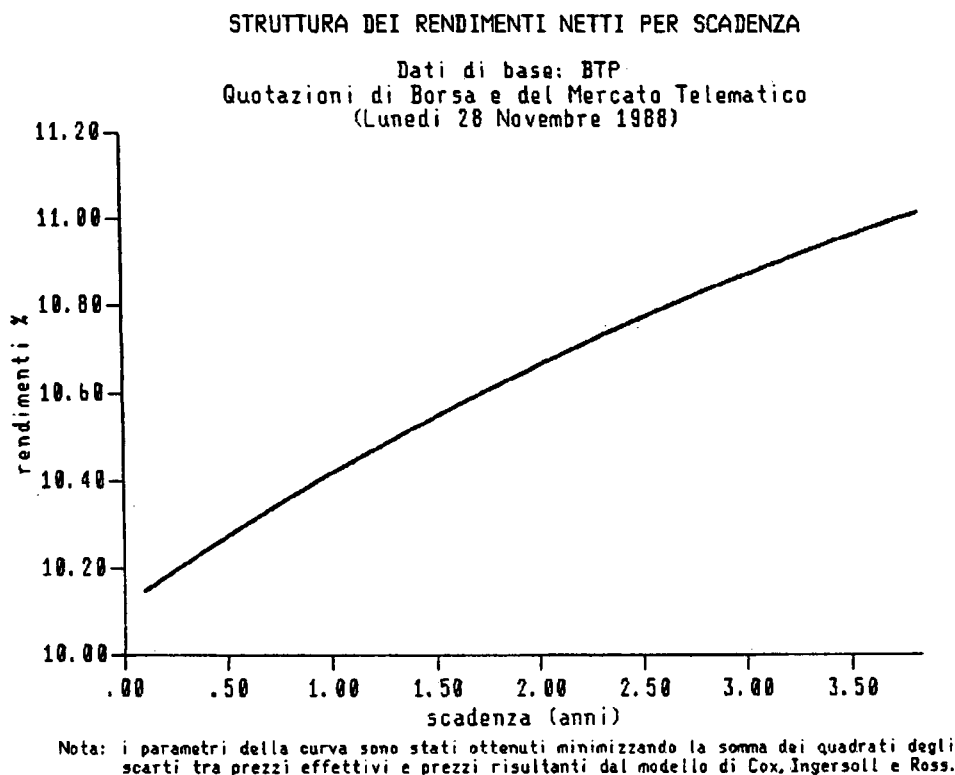
PARAMETRI DEL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS



Nota: le curve sono state ottenute sulla base dei valori di f_1 , f_2 e f_3 stimati (0,25881, 0,25124, 15,511).

La struttura dei rendimenti stimata in base a questi parametri appariva crescente in funzione della scadenza, risultando compresa tra il tasso istantaneo di 0,09634 e il tasso asintotico a lungo termine (dato dalla [15]) di 0,1174 (fig. 4 e tav. a1).

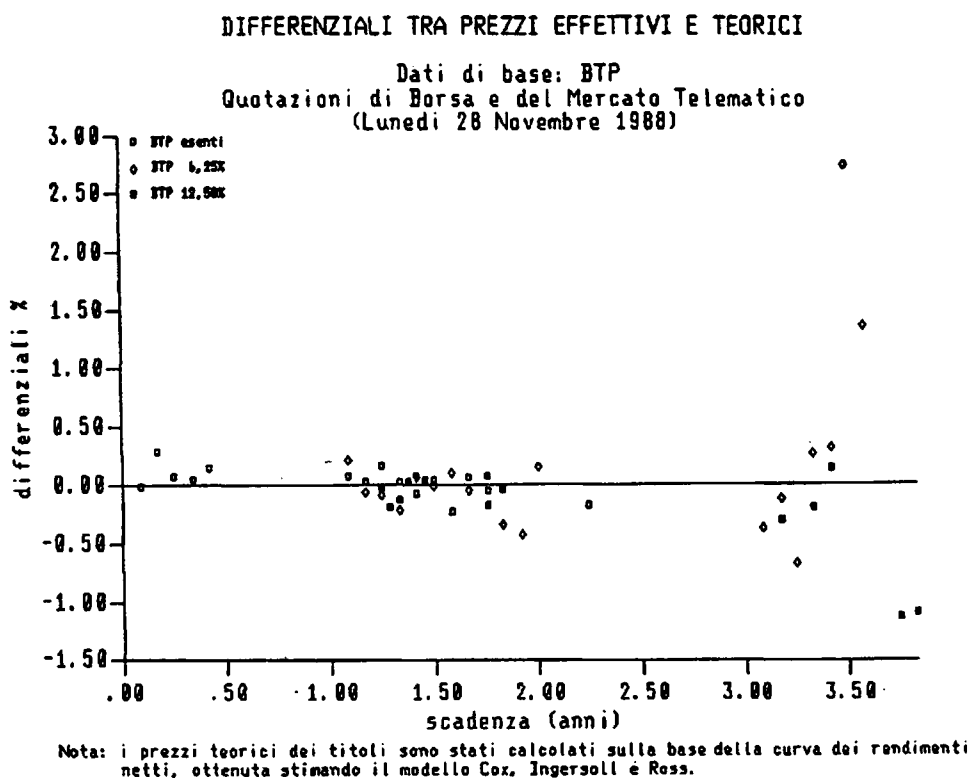
Fig. 4



La varianza dei prezzi dei BTP è stata quasi interamente spiegata dal modello ($R^2 \approx 1$): i differenziali tra prezzi effettivi e teorici risultavano inferiori, in valore assoluto, allo 0,1 per cento nel 45 per cento dei casi e allo 0,5 per cento nel 90 per cento dei casi (fig. 5 e tav. a2).

Dati i valori stimati dei parametri e della variabile di stato, l'equazione [25], soggetta alla boundary condition [19], è stata risolta per determinare il valore dei CTO all'emissione, che è risultato pari a 94,52, implicando un valore di 0,07 per l'opzione call e 5,53 per l'opzione put (tav. 2).

Fig. 5



Tav. 2

Scomposizione del prezzo dei CTO

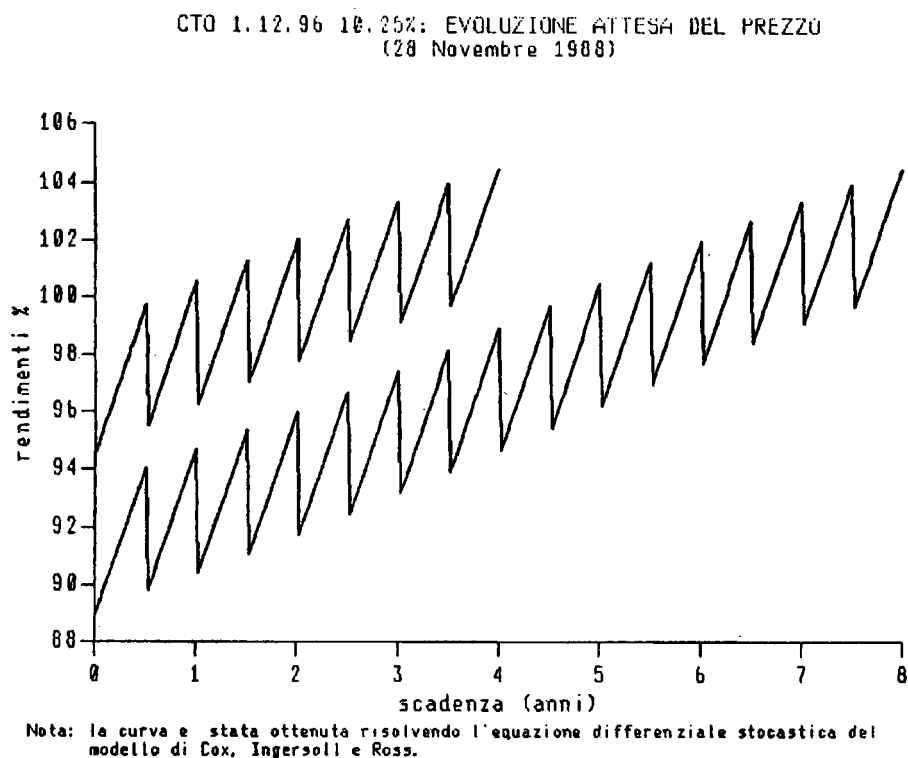
Obbligazione a 4 anni	94,45
Opzione call	0,07
Totale	94,52

Obbligazione a 8 anni	88,99
Opzione put	5,53
Totale	94,52

I valori ottenuti riflettono la configurazione della curva dei rendimenti: una curva crescente implica aspettative di rialzo dei tassi e quindi di caduta dei prezzi di mercato dei titoli a tasso fisso, determinando un basso valore dell'opzione di estensione (call) ed un valore relativamente elevato dell'opzione di rimborso anticipato (put).

Sulla base del modello risulta anche possibile ottenere l'evoluzione attesa del prezzo dei CTO. La configurazione crescente della curva dei rendimenti è coerente con aspettative di rimborso anticipato alla fine del quarto anno: l'andamento atteso del prezzo dei CTO risulta pertanto sostanzialmente coincidente con quello di un titolo ordinario a 4 anni e notevolmente più elevato rispetto a quello di un titolo ordinario a 8 anni con pari tasso cedolare (fig. 6).

Fig. 6



7. - L'effetto delle caratteristiche contrattuali
sul valore dei CTO

Il modello di valutazione è stato anche utilizzato per simulare l'effetto di modifiche delle caratteristiche contrattuali dei CTO sul loro valore all'emissione e sulla probabilità che i titoli siano detenuti fino a scadenza. Tali simulazioni sono state effettuate sulla base di tre diverse configurazioni della struttura dei rendimenti per scadenza: la prima crescente (curva A), la seconda "piatta" (curva B) e la terza decrescente (curva C). La curva A corrisponde alla curva utilizzata per l'analisi precedente. I parametri delle curve B e C sono stati determinati in modo da fornire un valore di σ pari a quello stimato (0,0617) ed un tasso asintotico a lungo termine, pari, rispettivamente, a 0,09634 (valore stimato del tasso istantaneo) ed a 0,075262 (per simmetria con la curva A).

7.1. - Prezzo di esercizio dell'opzione

I CTO emessi a dicembre sono rimborsabili alla pari alla fine del quarto anno. Nella tavola 3 si è esaminato l'effetto di un prezzo di rimborso anticipato variabile tra 97 e 103: questo equivale ad ipotizzare un diverso prezzo di esercizio K per le opzioni call e put.

Ad un maggior prezzo di rimborso anticipato corrisponde una minore probabilità che il titolo venga detenuto fino alla scadenza più lunga, e quindi un più elevato valore dell'opzione di rimborso anticipato (put) e un più contenuto valore dell'opzione di estensione (call). Inoltre, poiché un CTO con prezzo di rimborso anticipato più alto offre un evidente vantaggio rispetto ad un titolo altrimenti uguale, il suo valore deve essere funzione crescente del prezzo di rimborso anticipato.

Prezzi teorici dei CTO in funzione del prezzo di esercizio

K		97	98	99	100	101	102	103
CALL	A	0,26	0,17	0,10	0,06	0,03	0,02	0,01
	B	1,44	1,12	0,84	0,62	0,44	0,30	0,19
	C	4,20	3,62	3,08	2,58	2,12	1,71	1,34
PUT	A	3,75	4,32	4,91	5,53	6,16	6,80	7,45
	B	1,50	1,86	2,26	2,71	3,21	3,75	4,33
	C	0,37	0,50	0,66	0,85	1,09	1,38	1,71
CTO	A	92,74	93,31	93,90	94,51	95,14	95,79	96,43
	B	96,30	96,65	97,06	97,51	98,01	98,55	99,12
	C	101,50	101,63	101,79	101,98	102,23	102,51	102,85

Nota: i valori delle opzioni e dei CTO sono stati ottenuti nelle ipotesi di curva dei rendimenti crescente (A), costante (B) e decrescente (C), per $T=4$, $s=8$, $T_n=10,25$.

7.2. - Data di esercizio dell'opzione

Una più lontana data di esercizio dell'opzione ha un duplice effetto: da un lato riduce il valore attuale del guadagno atteso, dall'altro incide sulla probabilità che si determinino oscillazioni significative del prezzo del titolo opzionabile. Quest'ultimo effetto dipende dalla relazione esistente tra la data di esercizio dell'opzione (T) e la scadenza del titolo (s). Quando s è molto elevato rispetto a T , un aumento di T accresce la dispersione dei possibili prezzi del titolo alla data di esercizio; viceversa, quando s è prossimo a T , un aumento di T riduce la dispersione dei prezzi alla data di esercizio.⁹ Pertanto, poiché il valore di un'opzione aumenta al crescere della variabilità dei prezzi del titolo sottostante, il differimento della data di esercizio ha un'effetto sul valore dell'opzione che risulta dapprima positivo e poi negativo.

9. Nel caso limite di $T=s$ il prezzo del titolo opzionabile alla data di esercizio dell'opzione è certo: $B(T, T, T_n)=1$.

Come conseguenza dei due effetti sopra ricordati, il primo costantemente negativo e il secondo non sempre positivo, il prezzo delle opzioni tende ad essere una funzione decrescente di T. Pertanto, il valore corrente dei CTO risulta in genere tanto minore quanto più lontana nel tempo è la data di rimborso anticipato (tav. 4).

Tav. 4

Prezzi teorici dei CTO in funzione della data di esercizio

T		1	2	3	4	5	6	7
CALL	A	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,08	0,06
	B	0,26	0,50	0,60	0,62	0,56	0,44	0,26
	C	2,74	3,06	2,94	2,58	2,07	1,46	0,76
PUT	A	9,92	8,54	7,05	5,53	4,05	2,63	1,28
	B	4,60	4,03	3,38	2,71	2,05	1,38	0,70
	C	0,98	1,07	0,99	0,85	0,69	0,50	0,28
CTO	A	98,90	97,53	96,03	94,51	93,03	91,61	90,27
	B	99,39	98,82	98,17	97,51	96,84	96,18	95,50
	C	102,11	102,20	102,12	101,98	101,82	101,64	101,41

Nota: i valori delle opzioni e dei CTO sono stati ottenuti nelle ipotesi di curva dei rendimenti crescente (A), costante (B) e decrescente (C), per $K=100$, $s=8$, $T_n=10,25$.

7.3. - Scadenza del titolo

Anche l'allungamento della scadenza del CTO ha un effetto non univoco: da un lato fa aumentare il valore corrente delle opzioni, perché accresce la variabilità del prezzo del titolo ad esse sottostante, dall'altro incide sul loro valore atteso alla data di esercizio. Quest'ultimo effetto dipende dalla configurazione della curva dei rendimenti. Ad una curva crescente si associano prezzi attesi del titolo progressivamente decrescenti all'aumentare della scadenza (s): questo comporta la riduzione del valore dell'opzione call e l'aumento del valore dell'opzione put. L'opposto si verifica nel caso di una curva dei

rendimenti decrescente.

Come conseguenza dei due effetti sopra ricordati, il primo costantemente positivo e il secondo non sempre negativo, il valore delle opzioni tende ad essere una funzione crescente di s . Pertanto, il valore corrente dei CTO risulta in genere tanto maggiore quanto maggiore è la loro scadenza (tav. 5).

Tav. 5

Prezzi teorici dei CTO in funzione della scadenza

s		5	6	7	8	9	10	11
CALL	A	0,09	0,11	0,09	0,06	0,04	0,02	0,01
	B	0,31	0,49	0,58	0,62	0,62	0,59	0,56
	C	0,78	1,46	2,05	2,58	3,07	3,52	3,93
PUT	A	1,59	3,03	4,34	5,53	6,62	7,61	8,51
	B	0,92	1,65	2,24	2,71	3,11	3,45	3,74
	C	0,43	0,68	0,81	0,85	0,85	0,83	0,77
CTO	A	94,55	94,56	94,54	94,51	94,49	94,47	94,46
	B	97,21	97,38	97,48	97,51	97,51	97,49	97,45
	C	100,19	100,86	101,45	101,98	102,47	102,93	103,34

Nota: i valori delle opzioni e dei CTO sono stati ottenuti nelle ipotesi di curva dei rendimenti crescente (A), costante (B) e decrescente (C), per $K=100$, $T=4$, $T_n=10,25$.

7.4. - Tasso nominale

Ad un più elevato tasso nominale corrisponde una maggiore probabilità che i CTO vengano detenuti fino alla scadenza più lunga, e quindi un più elevato valore dell'opzione di estensione (call) e un più contenuto valore dell'opzione di rimborso anticipato (put). Inoltre, poiché un CTO con un più elevato tasso nominale offre un evidente vantaggio rispetto ad un titolo altrimenti uguale, il valore dei CTO deve essere funzione crescente del loro tasso nominale (tav. 6).

Prezzi teorici dei CTO in funzione del tasso nominale

Tn		8,00	8,75	9,50	10,25	11,00	11,75	12,50
CALL	A	0,00	0,00	0,01	0,06	0,18	0,43	0,85
	B	0,02	0,09	0,27	0,62	1,18	1,96	2,94
	C	0,40	0,88	1,61	2,58	3,75	5,06	6,47
PUT	A	9,52	8,17	6,83	5,53	4,30	3,20	2,26
	B	6,44	5,07	3,81	2,71	1,83	1,17	0,71
	C	3,28	2,22	1,42	0,85	0,49	0,26	0,13
CTO	A	88,16	90,26	92,37	94,51	96,73	99,08	101,60
	B	90,54	92,74	95,04	97,51	100,19	103,10	106,20
	C	93,35	95,98	98,86	101,98	105,31	108,77	112,33

Nota: i valori delle opzioni e dei CTO sono stati ottenuti nelle ipotesi di curva dei rendimenti crescente (A), costante (B) e decrescente (C), per $K=100$, $T=4$, $s=8$.

7.5. - Conclusioni

Assumendo che i CTO vengano emessi con l'obiettivo di allungare la vita media del debito pubblico, il Tesoro dovrebbe massimizzare il valore dell'opzione di estensione, al fine di rendere maggiormente probabile la detenzione del titolo fino alla scadenza.

Dall'analisi precedente risulta che quest'obiettivo può essere raggiunto riducendo il prezzo di rimborso anticipato (K) e aumentando il tasso nominale (Tn) del titolo. La scelta della scadenza e della data di rimborso anticipato dipende invece dalla configurazione corrente della curva dei rendimenti. In presenza di una curva crescente, queste caratteristiche sono relativamente poco importanti. In presenza di una curva decrescente, invece, il Tesoro avrebbe interesse ad anticipare, entro un certo limite, la data di rimborso anticipato (T) e ad allungare la scadenza (s) del titolo.

APPENDICE

Tav. a1

PREZZI E RENDIMENTI NETTI TEORICI

Dati di base: BTP
Quotazioni di Borsa e del Mercato Telematico
(Lunedì 28 novembre 1988)

Scadenze	Prezzi teorici	Rendimenti	Rendimenti a termine		
		a pronti	3 mesi	6 mesi	12 mesi
3 mesi	97,64	10,19	10,34	10,42	10,55
6 mesi	95,16	10,27	10,49	10,56	10,68
1 anno	90,57	10,41	10,75	10,81	10,91
2 anni	81,66	10,66	11,16	11,20	11,28
3 anni	73,38	10,87	11,47	11,50	-

Nota: i prezzi teorici sono stati calcolati sulla base della curva dei rendimenti netti per scadenza, ottenuta con il modello di Cox, Ingersoll e Ross.

Tav. a2

DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI

Dati di base: BTP
Quotazioni di Borsa e del Mercato Telematico
(Lunedì 28 novembre 1988)

Codice A.B.I.	Titolo		Aliquota fiscale	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.
12491	BTP	1.1.89 12,50%	-	100,10	100,11	-0,01
12494	BTP	1.2.89 12,50%	-	100,60	100,32	0,28
12496	BTP	1.3.89 12,50%	-	100,65	100,58	0,07
12499	BTP	1.4.89 12,00%	-	100,60	100,55	0,05
12601	BTP	1.5.89 10,50%	-	100,30	100,16	0,14
12492	BTP	1.1.90 12,50%	-	102,30	102,23	0,07
12610	BTP	1.1.90 9,25%	6,25	98,56	98,34	0,21
12495	BTP	1.2.90 12,50%	-	102,40	102,38	0,02
12612	BTP	1.2.90 9,25%	6,25	98,15	98,22	-0,07
12497	BTP	1.3.90 12,50%	-	102,75	102,58	0,17
12614	BTP	1.3.90 9,15%	6,25	97,95	98,04	-0,09
12628	BTP	1.3.90 10,50%	12,50	98,64	98,67	-0,03

(continua)

(segue) Tav. a2

DIFFERENZIALI TRA PREZZI EFFETTIVI E PREZZI TEORICI

Dati di base: BTP
Quotazioni di Borsa e del Mercato Telematico
(Lunedì 28 novembre 1988)

Codice A.B.I.	Titolo	Aliquota fiscale	Prezzo eff.	Prezzo teor.	Diff.
12629	BTP 15.3.90 10,50%	12,50	98,45	98,64	-0,19
12600	BTP 1.4.90 12,00%	-	102,10	102,08	0,02
12616	BTP 1.4.90 9,15%	6,25	97,65	97,86	-0,21
12630	BTP 1.4.90 10,50%	12,50	98,45	98,58	-0,13
12632	BTP 15.4.90 10,50%	12,50	98,50	98,48	0,02
12602	BTP 1.5.90 10,50% I	-	100,20	100,27	-0,07
12618	BTP 1.5.90 9,15%	6,25	97,80	97,74	0,06
12633	BTP 1.5.90 10,50% II	12,50	98,55	98,48	0,07
12635	BTP 18.5.90 10,50%	12,50	98,50	98,46	0,04
12603	BTP 1.6.90 10,00%	-	99,65	99,62	0,03
12620	BTP 1.6.90 9,15%	6,25	97,60	97,62	-0,02
12604	BTP 1.7.90 9,50%	-	98,60	98,82	-0,22
12622	BTP 1.7.90 10,50%	6,25	99,40	99,30	0,10
12605	BTP 1.8.90 9,50%	-	98,80	98,74	0,06
12624	BTP 1.8.90 10,50%	6,25	99,15	99,20	-0,05
12606	BTP 1.9.90 9,25%	-	98,15	98,21	-0,06
12625	BTP 1.9.90 11,25%	12,50	99,10	99,03	0,07
12641	BTP 1.9.90 11,50%	12,50	99,20	99,38	-0,18
12607	BTP 1.10.90 9,25%	6,25	96,80	97,15	-0,35
12626	BTP 1.10.90 11,50%	12,50	99,40	99,44	-0,04
12608	BTP 1.11.90 9,25%	6,25	96,56	96,99	-0,43
12609	BTP 1.12.90 9,25%	6,25	97,00	96,85	0,15
12498	BTP 1.3.91 12,50%	-	103,85	104,03	-0,18
12611	BTP 1.1.92 9,25%	6,25	94,59	94,96	-0,38
12613	BTP 1.2.92 9,25%	6,25	94,65	94,78	-0,13
12627	BTP 1.2.92 11,00%	12,50	96,95	97,25	-0,30
12615	BTP 1.3.92 9,15%	6,25	93,75	94,43	-0,68
12617	BTP 1.4.92 9,15%	6,25	94,55	94,29	0,26
12631	BTP 1.4.92 11,00%	12,50	96,85	97,05	-0,20
12619	BTP 1.5.92 9,15%	6,25	94,40	94,09	0,31
12634	BTP 1.5.92 11,00%	12,50	97,00	96,87	0,13
12621	BTP 1.6.92 9,15%	6,25	96,75	94,01	2,74
12623	BTP 1.7.92 10,50%	6,25	98,95	97,59	1,36
12642	BTP 1.9.92 12,50%	12,50	99,50	100,62	-1,12
12644	BTP 1.10.92 12,50%	12,50	99,52	100,61	-1,09

Nota: i prezzi teorici sono stati calcolati sulla base della curva dei rendimenti netti per scadenza, ottenuta con il modello di Cox, Ingersoll e Ross.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- ANANTHANARAYANAN, A. - SCHWARTZ, E. (1980), Retractable and Extendible Bonds: The Canadian Experience, "Journal of Finance", n. 1, pp. 31-47.
- BARONE, E. - CESARI, R. (1986), Rischio e rendimento dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile in un modello stocastico univariato, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 73.
- BRENNAN, M. - SCHWARTZ, E. (1977), Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds, "Journal of Financial Economics", n. 5, pp. 67-88.
- BRENNAN, M. - SCHWARTZ, E. (1978), Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", n. 3, pp. 461-474.
- BROWN, R. - SCHAEFER, S. (1988), Testing the Cox, Ingersoll & Ross Model on British Government Index-Linked Securities, London Business School, (IFA-109-88).
- BROWN, S. - DYBVIG, P. (1986), The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates, "Journal of Finance", n. 3, pp. 617-632.
- COX, J. - INGERSOLL, J. - ROSS, S. (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, "Econometrica", n. 2, pp. 385-407.
- GESKE, R. - SHASTRI, K. (1985), Valuation by Approximation: Alternative Option Valuation Techniques, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", n. 1, pp. 45-71.
- GIBBONS, M. - RAMASWAMY, K. (1986), The Term Structure of Interest Rates: Empirical Evidence, Unpublished Working Paper.

ELENCO DEI PIÙ RECENTI TEMI DI DISCUSSIONE (*)

- n. 95 — *Una applicazione del filtro di Kalman per la previsione dei depositi bancari*, di A. CIVIDINI - C. COTTARELLI (ottobre 1987).
- n. 96 — *Macroeconomic Policy Coordination of Interdependent Economies: the Game-Theory Approach in a Static Framework*, di J. C. MARTINEZ OLIVA (ottobre 1987).
- n. 97 — *Occupazione e disoccupazione: tendenze di fondo e variazioni di breve periodo*, di P. SYLOS LABINI (novembre 1987).
- n. 98 — *Capital controls and bank regulation*, di G. GENNOTTE - D. PYLE (dicembre 1987).
- n. 99 — *Funzioni di costo e obiettivi di efficienza nella produzione bancaria*, di G. LANCIOTTI - T. RAGANELLI (febbraio 1988).
- n. 100 — *L'imputazione di informazioni mancanti: una sperimentazione*, di L. CANNARI (marzo 1988).
- n. 101 — *Esiste una curva di Beveridge per l'Italia? Analisi empiriche della relazione tra disoccupazione e posti di lavoro vacanti (1980-1985)*, di P. SESTITO (marzo 1988).
- n. 102 — *Alcune considerazioni sugli effetti di capitalizzazione determinati dalla tassazione dei titoli di Stato*, di D. FRANCO - N. SARTOR (luglio 1988).
- n. 103 — *La coesione dello SME e il ruolo dei fattori esterni: un'analisi in termini di commercio estero*, di L. BINI SMAGHI - S. VONA (luglio 1988).
- n. 104 — *Stime in tempo reale della produzione industriale*, di G. BODO - A. CIVIDINI - L. F. SIGNORELLI (luglio 1988).
- n. 105 — *On the difference between tax and spending policies in models with finite horizons*, di W. H. BRANSON - G. GALLI (ottobre 1988).
- n. 106 — *Non nested testing procedures: Monte Carlo evidence and post simulation analysis in dynamic models*, di G. PARIGI (ottobre 1988).
- n. 107 — *Completamento del mercato unico. Conseguenze reali e monetarie*, di A. FAZIO (ottobre 1988).
- n. 108 — *Modello mensile del mercato monetario*, (ottobre 1988).
- n. 109 — *Il mercato unico europeo e l'armonizzazione dell'IVA e delle accise*, di C. A. BOLLINO - V. CERIANI - R. VIOLI (dicembre 1988).
- n. 110 — *Il mercato dei contratti a premio in Italia*, di E. BARONE - D. CUOCO (dicembre 1988).
- n. 111 — *Delegated screening and reputation in a theory of financial intermediaries*, di D. TERLIZZESE (dicembre 1988).
- n. 112 — *Procedure di destagionalizzazione dei depositi bancari mensili in Italia*, di A. CIVIDINI - C. COTTARELLI (gennaio 1989).
- n. 113 — *Intermediazione finanziaria non bancaria e gruppi bancari plurifunzionali: le esigenze di regolamentazione prudenziale*, (febbraio 1989).
- n. 114 — *La tassazione delle rendite finanziarie nella CEE alla luce della liberalizzazione valutaria* (febbraio 1989).
- n. 115 — *Il ruolo delle esportazioni nel processo di crescita e di aggiustamento dei PVS*, di L. BINI SMAGHI - D. PORCIANI - L. TORNETTA (marzo 1989).
- n. 116 — *LDCs' repayment problems: a probit analysis*, di F. DI MAURO - F. MAZZOLA (maggio 1989).
- n. 117 — *Mercato interbancario e gestione degli attivi bancari: tendenze recenti e linee di sviluppo*, di G. FERRI - P. MARULLO REEDTZ (giugno 1989).

(*) I «Temi» possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.

