BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

Il mercato dei contratti a premio in Italia

di Emilio Barone e Domenico Cuoco

Numero 110 - Dicembre 1988

BANCA D'ITALIA

Temi di discussione

del Servizio Studi

Il mercato dei contratti a premio in Italia
Un'applicazione dell'*Option Pricing Theory*

di Emilio Barone e Domenico Cuoco

Numero 110 - Dicembre 1988

SOMMARIO

Nonostante la loro crescente importanza presso le Borse italiane, i contratti a premio risultano ancora poco analizzati. Questo lavoro fornisce dapprima una descrizione del funzionamento del mercato dei premi, al fine di porre in luce le sue particolarità istituzionali rispetto ai mercati esteri delle opzioni su titoli azionari, e quindi una formula per la valutazione dei premi basata su tecniche di arbitraggio analoghe a quelle utilizzate nell'Option Pricing Theory. La verifica empirica della corrispondenza tra premi di mercato e valori teorici offre infine alcune indicazioni sulle possibilità di arbitraggio tra contratti a premio e a termine fermo e quindi sull'efficienza dei mercati azionari in Borsa.

INDICE

1. INTRODUZIONE

Il mercato dei premi rappresenta l'equivalente dell'options market anglosassone: in esso vengono stipulati particolari contratti, detti contratti a premio o contratti a termine condizionato, che attribuiscono ad una delle controparti, dietro pagamento di un premio, una particolare facoltà di scelta (opzione) in ordine all'esecuzione di una compravendita di titoli.

Tale facoltà varia a seconda del tipo di contratto. Il contratto dont (equivalente alla call option anglosassone) attribuisce al datore (o compratore) del premio la facoltà, da esercitarsi entro una determinata scadenza (giorno di risposta premi), di acquistare un dato quantitativo di titoli ad un prezzo convenuto (prezzo base). Invece, il contratto put (equivalente alla put option anglosassone) attribuisce al datore del premio la facoltà di vendere i titoli. Accanto al dont e al put, che sono contratti a premio semplice, vengono negoziati contratti a premio doppio, che si configurano come loro combinazioni: lo stellage attribuisce al datore del premio la facoltà di ritirare o consegnare un determinato quantitativo di titoli al prezzo base convenuto, lo strip la facoltà di ritirare un determinato quantitativo di titoli oppure consegnarne un quantitativo doppio e lo strap la facoltà di ritirare il quantitativo pattuito oppure consegnarne un quantitativo dimezzato.

Qualora si esercitino le facoltà acquistate, i contratti a premio si trasformano in ordinari contratti a termine fermo che seguono il ciclo di liquidazione fissato dal calendario di Borsa: le opzioni si riferiscono pertanto a contratti a termine (options on forward contracts), diversamente dalle più comuni opzioni anglosassoni, che fanno riferimento a contratti a pronti (options on spot contracts). Il pagamento del premio avviene inoltre in via posticipata alla data di liquidazione, diversamente dalle options, per le quali ha luogo in via anticipata alla stipulazione del contratto.

Nonostante la loro crescente importanza presso le Borse italiane,[1] i contratti a premio risultano ancora poco analizzati. In particolare, nessun tentativo approfondito risulta essere stato fatto finora di verificare l'applicabilità dell'Option Pricing Theory[2] al mercato dei premi in Ita-

---

[1] Nel 1987 sono stati trattati 108.997 contratti a premio. Il controvalore dei titoli trattati a premio (11.020 miliardi di lire) è stato pari, nello stesso anno, al 26% del totale degli scambi azionari alla Borsa di Milano (41.967 miliardi).

[2] Lo studio delle opzioni ha una storia illustre che risale alla fine del diciannovesimo secolo. Tuttavia una teoria completamente soddisfacente della valutazione delle opzioni è stata sviluppata solo agli inizi degli anni '70 ad opera di Black-Scholes (1973) e di Merton (1973). Da allora l'Option

lia,[a] sebbene la accennata analogia strutturale tra contratti a premio ed opzioni induca a ritenere che i risultati raggiunti nell'ambito di tale teoria possano essere utilmente impiegati ai fini della valutazione dei premi.

La derivazione di una formula per la valutazione dei contratti a premio e per la determinazione dei premi di equilibrio costituisce l'oggetto di questo lavoro. Esso è organizzato nel modo seguente. Il paragrafo 2 fornisce una descrizione preliminare del funzionamento del mercato dei premi. Il paragrafo 3 avvia l'analisi della determinazione dei premi con la derivazione delle c.d. equivalenze di Borsa, esprimenti le relazioni di equilibrio tra i valori dei diversi tipi di contratto a premio su uno stesso titolo. Tali relazioni di equilibrio consentono di ricondurre il problema della valutazione dei premi a quello della valutazione del premio dont. Il paragrafo 4 mostra quindi come l'Option Pricing Theory possa essere impiegata per la valutazione dei contratti a premio dont. La formula derivata è sottoposta ad una verifica empirica nel paragrafo 5.

2. IL MERCATO DEI PREMI IN ITALIA: ASPETTI DIMENSIONALI ED OPERATIVI

Sebbene le operazioni a premio siano sempre state presenti nelle nostre borse, quello dei premi è stato a lungo considerato un mercato marginale, riservato a pochi operatori specializzati, e lasciato privo di qualsiasi forma di regolamentazione.

Solo a partire dal 10 luglio 1968, con la concentrazione delle contrattazioni a premio concluse alla Borsa di Milano nella IV corbeille, destinata ai titoli a scarso flottante, ed in seguito con la istituzione di una apposita grida dei premi, il mercato dei premi ha cominciato a condividere con le altre contrattazioni di borsa quelle garanzie che derivano dalla esistenza di un mercato ufficiale, con continuità di contrattazioni, pubblicazione dei prezzi e intermediazione di operatori specializzati.

La quasi totalità delle operazioni a premio è effettuata presso la Borsa di Milano, l'unica a tutt'oggi che abbia una grida apposita per queste contrattazioni. Nelle altre borse,

Pricing Theory è stata rifinita e generalizzata in molti aspetti e si è rivelata uno dei più promettenti contributi allo sviluppo della moderna teoria finanziaria.

[a] Fa eccezione il confronto tra alcuni premi di mercato e i valori risultanti dalla formula di Black-Scholes effettuato da Pianca (1982). Pianca si è tuttavia limitato alla applicazione della formula di Black-Scholes senza adeguarla alla realtà operativa dei mercati italiani. Altri autori hanno analizzato i contratti a premio secondo un "approccio empirico". Tedeschi e Verga (1983), ad esempio, stimano i coefficienti di regressione dei premi su singole variabili ritenute significative.

benché le operazioni a premio siano sempre possibili, esse trovano rara attuazione e non vengono spesso rilevate dagli stessi listini ufficiali.

2.1. Aspetti dimensionali

I dati relativi all'andamento recente delle contrattazioni a premio alla Borsa di Milano sono riportati nella tabella 2.1.[4] Da essi emerge immediatamente la forte variabilità delle dimensioni operative del mercato dei premi.

Il controvalore dei titoli trattati a premio è aumentato di oltre 15 volte nei 20 mesi intercorrenti tra il luglio 1984 ed il marzo 1986, per poi dimezzarsi negli ultimi mesi dell'anno, conseguentemente alla flessione del mercato ed alla delibera Consob del 2 aprile 1986,[5] e rimanere sostanzialmente stabile nel corso del 1987.

[4] Va sottolineato che questi dati, forniti dal Centro Elettronico della Borsa di Milano, sottostimano le dimensioni reali del mercato dei premi, in quanto restano escluse le operazioni effettuate al di fuori della borsa (soprattutto presso i borsini delle banche).

[5] Con questa delibera sono state vietate le vendite dei premi allo scoperto.

Tabella 2.1: Contratti a fermo e a premio alla Borsa di Milano
(luglio 1984-dicembre 1987)

Mese	Controv. premi (milioni)	Controv. titoli trattati - a premio (milioni) (a)	Controv. titoli trattati - a fermo (milioni) (b)	Peso relativo premi (a)/(b)*100
Lug-84	3.346	83.418	358.536	23,27
Ago-84	4.181	105.110	609.888	17,23
Set-84	4.793	137.820	509.857	27,03
Ott-84	4.362	123.842	580.017	21,35
Nov-84	4.747	140.687	584.958	24,05
Dic-84	4.340	126.351	625.077	20,21
Gen-85	10.194	182.780	1.624.935	11,25
Feb-85	19.902	374.114	2.042.271	18,32
Mar-85	17.356	304.404	1.383.640	22,00
Apr-85	10.891	257.114	875.558	29,37
Mag-85	11.184	270.191	1.664.933	16,23
Giu-85	17.667	392.520	2.038.034	19,26
Lug-85	26.264	451.824	2.355.842	19,18
Ago-85	18.093	345.913	1.824.088	18,96
Set-85	22.101	477.731	2.911.620	16,41
Ott-85	31.992	625.721	3.314.411	18,88
Nov-85	29.320	593.432	3.228.282	18,38
Dic-85	48.144	931.814	3.051.273	30,54
Gen-86	34.470	666.138	3.996.373	16,67
Feb-86	43.832	891.448	5.280.830	16,88
Mar-86	111.382	1.503.198	7.412.156	20,28
Apr-86	139.806	1.353.245	7.200.615	18,79
Mag-86	79.834	827.277	9.577.351	8,64
Giu-86	76.156	769.439	5.459.389	14,09
Lug-86	24.014	320.378	3.858.106	8,30
Ago-86	35.930	609.623	4.386.229	13,90
Set-86	42.992	803.363	5.717.704	14,05
Ott-86	38.097	848.283	6.677.413	12,70
Nov-86	49.141	1.321.725	4.172.488	31,68
Dic-86	24.555	688.137	2.922.190	23,55
Gen-87	21.126	611.985	3.668.380	16,68
Feb-87	24.083	860.872	3.065.563	28,08
Mar-87	18.643	684.379	3.906.179	17,52
Apr-87	38.392	1.255.425	5.158.249	24,34
Mag-87	40.790	1.304.265	3.687.723	35,37
Giu-87	36.852	1.295.981	2.592.848	49,98
Lug-87	19.697	754.382	2.512.469	30,03
Ago-87	15.541	592.031	2.947.450	20,09
Set-87	19.854	766.956	3.459.319	22,17
Ott-87	40.164	1.263.571	5.701.429	22,16
Nov-87	41.496	1.124.380	3.331.885	33,75
Dic-87	20.348	505.340	1.935.505	26,11

(Fonte: Comitato Direttivo degli Agenti di Cambio della Borsa Valori di Milano, Il comportamento in Borsa dei valori azionari, Milano, 1988)

Nel triennio 1985-1987, il peso delle contrattazioni a premio sul totale degli scambi azionari alla Borsa di Milano (misurato in termini di controvalore dei titoli) ha oscillato su base mensile tra l'8 ed il 50 per cento, con una incidenza media del 19,88%.

Più del 95% delle operazioni a premio è costituito da dont, circa il 3% da stellage, ed il rimanente 2% è suddiviso tra le altre operazioni (put, strip e strap) che solo a partire dal 1980 hanno acquistato una qualche diffusione.

2.2. Organizzazione del mercato

2.2.1. Modalità di contrattazione

I contratti a premio vengono trattati "in continua", senza quindi dar luogo alla formazione di listini di apertura e di chiusura, con il metodo dell'asta competitiva bilaterale in uso nel "durante" sul mercato a termine fermo. I prezzi fatti vengono immediatamente registrati, insieme all'ora e alla data di stipulazione del contratto, e resi noti tramite trascrizione sulla lavagna attualmente in uso presso il tabellone luminoso della Borsa di Milano.

Mancando un prezzo di apertura e di chiusura, a listino vengono riportati, per ciascun premio contrattato durante la giornata, il prezzo minimo e massimo fatto.[6]

2.2.2. Basi negoziabili

Fino al 15 aprile 1986, i contratti a premio potevano essere stipulati con base apertura, durante o listino. Quest'ultimo era il caso di gran lunga più frequente, così da determinare una singolare anomalia: al momento della stipulazione del contratto il prezzo base era spesso non ancora noto e questo rendeva la negoziazione a premio fortemente aleatoria.[7]

---

[6] A questo riguardo, va sottolineata una grave insufficienza della informativa ufficiale. Anche dopo la delibera Consob del 2 aprile 1986 che ha istituito il sistema delle basi negoziabili, sui listini ufficiali della Borsa di Milano continuano ad essere riportati i premi minimi e massimi fatti per ciascun titolo, senza alcuna distinzione tra le diverse basi negoziate. I valori minimi e massimi distinti per basi sono invece riportati sui listini provvisori redatti sulla scorta delle denunce degli agenti di cambio al CED Borsa (e pubblicati sulle pagine finanziarie di alcuni quotidiani): tali dati hanno però carattere parziale perché vengono escluse dai computi tutte le partite che non consentano una perfetta corrispondenza tra acquisti e vendite a causa di un qualunque errore della controparte.

[7] Va incidentalmente osservato che questa aleatorietà del prezzo base è un ulteriore fattore che preclude la applicabilità della formula "standard" di Black e Scholes al periodo antecedente l'aprile 1986. Per una estensione di tale formula al caso di basi stocastiche, si veda S. Fischer (1978).

Questo sistema di determinazione delle basi è stato oggetto di una duplice modifica da parte della Consob, al fine di eliminare la citata anomalia.

Dapprima, con la delibera n.2077 del 2/4/86 si è stabilito che a partire dal 15 aprile 1986 la base dei contratti a premio dovesse essere riferita esclusivamente al prezzo di chiusura del titolo rilevato al listino ufficiale del giorno precedente, o, in mancanza, all'ultimo disponibile.

Con la delibera n.2265 del 26 giugno 1986 (e successive modifiche) si è quindi pervenuti, a decorrere dal 17 luglio 1986, ad un sistema abbastanza vicino a quello delle options anglosassoni. Sono state definite sette fasce di prezzo per il titolo contrattato: in corrispondenza di ciascuna fascia vengono definiti un "valore di riferimento" e le possibili variazioni delle basi, secondo la tabella 2.2. Le basi negoziabili sono determinate, a scelta dei contraenti, fra quelle ottenibili applicando al "valore di riferimento", corrispondente alla fascia di prezzo dei titoli oggetto del contratto, le variazioni di importo fisso. A questo riguardo la Consob pone l'unica limitazione che le basi risultino "prossime ai valori di mercato". Così, supponendo che i titoli oggetto del contratto a premio abbiano un valore di mercato di L.11.700, le basi negoziabili risulteranno orientativamente comprese fra L.11.000 e L.12.500, con intervalli di L.250.[8]

Tabella 2.2: Basi negoziabili

FASCE DI PREZZO	VALORE DI RIFERIMENTO	VARIAZIONE DELLE BASI
fino a L. 500	0	L. 10
da L. 501 a L. 1.000	L. 500	L. 25
da L. 1.001 a L. 2.500	L. 1.000	L. 50
da L. 2.501 a L. 7.500	L. 2.500	L. 100
da L. 7.501 a L. 15.000	L. 7.500	L. 250
da L.15.001 a L. 50.000	L. 15.000	L. 500
oltre L. 50.001	L. 50.000	L. 1.000

[8] Nel caso in cui il prezzo di mercato dei titoli sia prossimo al corrispondente "valore di riferimento", le basi negoziabili potranno comprendere, oltre allo stesso "valore di riferimento", anche valori ottenuti applicando la variazione della base in diminuzione di tale valore. Così, ad esempio, le basi negoziabili di un titolo il cui prezzo di mercato risulti pari a L.1030, potranno essere: L.950, L.1.000, L.1.050, L.1.100.

2.2.3. Scadenze trattate

Il calendario di borsa fissa, per ciascun mese borsistico,[9] un giorno, detto giorno della risposta premi, entro il quale il contraente che ha la facoltà di scelta deve esprimerla e renderla nota all'altro contraente. Il giorno della risposta premi si colloca in linea di massima intorno alla metà del mese solare. Esso precede il giorno dei riporti (che è l'ultimo giorno di negoziazione per fine corrente), in modo da permettere agli operatori scoperti di effettuare le necessarie ricoperture.

Nelle nostre borse non esistono limitazioni legali alla durata di un contratto a premio: tali contratti possono quindi essere stipulati tanto per la risposta premi del mese borsistico corrente, quanto per quella di mesi successivi. Di regola, vengono stipulati contratti a premio con scadenza entro due cicli successivi a quello corrente (ossia con una durata che va sino ad un massimo di tre mesi). In particolare, la scadenza più intensamente trattata è il "fine prossimo" (60-30 giorni). Poco trattata è invece la scadenza del "fine corrente" (30-0 giorni), di norma negoziata solo nelle prime due settimane del mese borsistico e la scadenza del "fine secondo mese" (90-60 giorni), negoziata nelle ultime due settimane del mese borsistico.

La limitazione delle scadenze trattate, che era spiegata in passato anche da ragioni fiscali (l'aliquota delle tasse sui contratti di borsa raddoppiava per contratti con durata superiore ai 135 giorni), è dovuta soprattutto alla ridotta liquidità del mercato, che ostacola lo smobilizzo delle posizioni assunte, ed al difficile coordinamento delle operazioni a premio con le operazioni a termine fermo per scadenze superiori al fine corrente.

2.3. La risposta premi

In base alla delibera Consob del 13 maggio 1987, il datore del premio deve esercitare la propria facoltà, dichiarando se e come intende dare esecuzione al contratto, entro le ore 10 del giorno della risposta premi.[10]

---

[9] Il mercato azionario italiano è un mercato a termine in cui il pagamento e la consegna delle azioni acquistate è differito fino al giorno della liquidazione previsto dal calendario di borsa, che di norma coincide con l'ultimo giorno lavorativo del mese solare. Il mese borsistico, nel quale i contratti fatti si riferiscono ad una stessa data di liquidazione (fine corrente), copre un arco di tempo che va dal giorno dei compensi al giorno dei riporti, cioè dalla metà di un mese solare alla metà di quello successivo: le contrattazioni regolate, ad esempio, alla fine di marzo vengono svolte nel periodo da metà febbraio a metà marzo. I contratti stipulati all'inizio e alla fine del mese borsistico differiscono dunque di circa 30 giorni quanto a scadenza, dato che di norma i primi vengono regolati dopo 45 giorni e i secondi dopo 15.

[10] Prima della delibera, gli usi di borsa fissavano alle ore 11,15 il termine ultimo per la risposta premi.

Una esplicita risposta premi si riscontra peraltro nella prassi operativa solo se nel giorno della risposta premi il prezzo del titolo si colloca intorno al prezzo base: negli altri casi "il premio si risponde da solo". Questa pratica trova il suo fondamento nell'art.39 degli usi della Borsa di Milano, il quale dispone che, in caso di mancata risposta, il prenditore del premio è tenuto a regolarsi nel migliore interesse della controparte, dandone comunicazione al Comitato direttivo degli agenti di cambio.[11]

L'art.38 degli usi della Borsa di Milano fa salvo il diritto del datore del premio di manifestare la propria volontà anche prima del giorno della risposta premi, "ferma restando però la scadenza originaria del contratto", ossia la scadenza del contratto a termine fermo risultante dall'esercizio del premio.

Di regola non vi è convenienza a dare la risposta premi in anticipo sul giorno stabilito dal calendario ufficiale di borsa. Tale diritto trova applicazione pratica solo qualora, nelle more del contratto, si abbiano aumenti di capitale a pagamento o gratuiti, con conseguente stacco dei diritti di opzione o di assegnazione. Verificandosi la risposta anticipata prima del giorno dal quale il titolo inizia ad essere trattato ex opzione ed optandosi per il ritiro dei titoli, il contratto diviene a termine fermo e tali diritti competono al compratore. In caso contrario, la risposta premi alla scadenza viene data per i titoli optati e la base del premio viene decurtata di una cifra corrispondente al prezzo medio del diritto, determinato appositamente dal Comitato direttivo (si veda al riguardo il § 2.4). Verrà più avanti dimostrato (§ 3.2) che tale aggiustamento dei termini contrattuali non assicura piena protezione al datore del premio contro lo stacco dei diritti dal titolo trattato: lo stacco di una cedola di importo rilevante può dunque razionalmente giustificare la risposta anticipata.[12]

Una volta che la risposta sia stata data, il contratto a premio si risolve oppure si trasforma in un ordinario contratto a termine fermo, che trova la sua conclusione nella liquidazione di fine mese insieme agli altri contratti a termine stipulati durante il ciclo operativo.

---

[11] La recente delibera Consob che ha anticipato alle ore 10 (orario di inizio delle contrattazioni) il termine ultimo per la risposta premi, ha fatto si che il prezzo di riferimento per la risposta automatica sia il prezzo di listino del giorno precedente. In questo modo si è inteso por fine ad alcune disfunzioni del precedente sistema, che portava spesso ad evoluzioni "sospette" delle quotazioni, e aumentare i margini di tempo a disposizione del contraente per decidere il ritiro o l'abbandono.

[12] Un ulteriore motivo per ricorrere alla risposta anticipata deriva dalla attuale disciplina della Consob sulla copertura delle operazioni a termine: nel caso in cui i titoli acquistati a premio vengano rivenduti prima del giorno della risposta premi, la Consob richiede la copertura di questa posizione come se si trattasse di una vendita allo scoperto, a meno che non venga data risposta anticipata.

2.4. Disciplina dei diritti accessori

La disciplina dei diritti accessori dettata dagli usi con riferimento ai contratti a premio risulta coerente con quella generale prevista dal codice civile per le operazioni a termine (artt.1531 e 1532).

Poiché in seguito alla risposta premi (regolare o anticipata) il contratto a premio si trasforma in una normale operazione a termine fermo, da questa data spettano al compratore a termine tutti i diritti afferenti ai titoli negoziati, con la sola eccezione del diritto di voto, che resta al venditore a termine fino alla consegna effettiva.

Prima della risposta, avendo le obbligazioni in capo ai contraenti carattere solo eventuale (e nel caso dei contratti a premio doppio anche indeterminato, giacché non è ancora noto quale dei due contraenti assumerà la posizione di compratore e quale di venditore), tutti i diritti restano al proprietario dei titoli.

Questa regola di carattere generale è posta esplicitamente dagli usi con riferimento al diritto di opzione, stabilendosi che tale diritto spetta al datore del premio (che venga a trovarsi nella posizione di acquirente dei titoli) solo se la risposta anticipata è data prima del giorno iniziale per l'esercizio della opzione (art.38, usi della Borsa Valori di Milano). In caso contrario, il prezzo base è decurtato dell'importo lordo della cedola (determinato sulla base del c.d. prezzo medio di decurtazione appositamente stabilito dal Comitato direttivo degli agenti di cambio); la risposta è data e la liquidazione si esegue per titoli *ex cedola*. In ogni caso il premio resta invariato pur riferendosi ad un quantitativo "svalutato" di titoli (art.41 usi).

2.5. Oneri accessori

2.5.1. Provvigioni

Per i contratti a premio è previsto un particolare trattamento per ciò che attiene alle commissioni di intermediazione: su di essi la provvigione, rapportata al prezzo base dei titoli (e non al premio), è normalmente fatta pari alla metà (ovvero al 3,5 per mille) di quella percepita per operazioni a termine fermo. Tale prassi viene di norma estesa anche alle operazioni a fisso effettuate in contemporanea sugli stessi titoli.[13]

Per restare definitivamente acquisita all'intermediario, sul fissato bollato la provvigione è sempre portata in

[13] Deve ovviamente trattarsi di operazioni di segno opposto.

aumento (o in diminuzione) del premio, e mai della base (data la possibilità di abbandono). Nessuna provvigione aggiuntiva è dovuta in caso di esercizio della facoltà con conseguente ritiro o consegna dei titoli.

2.5.2. Oneri fiscali

I contratti a premio, come tutti i contratti aventi per oggetto valori mobiliari, sono soggetti ad un tributo speciale denominato "tassa sui contratti di borsa", che ha valore sostitutivo delle ordinarie tasse di bollo. Per i contratti premio stipulati in Borsa per il tramite degli agenti di cambio l'aliquota è attualmente pari allo 0,015%.

Al momento della stipulazione del contratto, la tassa viene applicata sul solo ammontare del premio (legge 6 ottobre 1964, n.947). Il giorno della risposta premi, se la facoltà viene esercitata, si procede alla compilazione di un secondo fissato bollato per l'importo effettivo della operazione a fermo. Tale fissato viene considerato retroattivo ai fini della tassazione, facendosi decorrere il computo della durata dal giorno di stipulazione dell'originario contratto a premio (e non dal giorno di risposta premi).

2.6. Obblighi di copertura

La delibera Consob n.929 del 3 luglio 1981 e successive modifiche ha introdotto per i contratti a termine l'obbligo del deposito di copertura, facendo comunque salvo il diritto degli agenti di cambio e degli esercenti la commissione di richiedere ulteriori garanzie.[14]

L'entità dei depositi sulle operazioni a premio è attualmente determinato alla Borsa Valori di Milano secondo lo schema riportato nella tabella 2.3.

Il deposito può essere costituito presso l'intermediario (agente di cambio, banca, commissionaria di borsa aderente alla Stanza di Compensazione) in contanti oppure in titoli, purché identificati, accompagnati da irrevocabile mandato a vendere e con specifica indicazione della destinazione.

---

[14] Prima della delibera Consob n.929 del 1981, che ha introdotto anche per i contratti a premio l'obbligo dei depositi a garanzia, gli agenti di cambio seguivano una norma deontologica, in base alla quale all'acquirente del premio era richiesto il versamento di un importo pari al controvalore del premio (importo che rappresenta la sua perdita massima) ed al venditore il versamento di una percentuale del valore di mercato del titolo che variava in base allo scarto richiesto dalle banche sulle operazioni di riporto.

Tabella 2.3: Deposito di copertura per operazioni a premio (delibera Consob 2 aprile 1986 n.2077)

DEPOSITI PER OPERAZIONI A PREMIO SEMPLICE
(DONT / PUT)

D	Compratore:	deve versare il premio
O		
N	Venditore:	deve dimostrare la disponibilità dei titoli
T		
P	Compratore:	deve versare il premio
U		
T	Venditore:	100% dell'impegno contrattuale massimo (dedotto l'importo del premio)

DEPOSITI PER OPERAZIONI A PREMIO COMPOSTO
(STELLAGE/STRIP/STRAP)

Compratore: deve versare il premio + copertura in contanti per la differenza rispetto al 50% (rispetto al 100% per lo STRIP) dell'impegno contrattuale massimo

oppure:

deposita i titoli

Venditore: deve dimostrare la disponibilità dei titoli

inoltre:

deve versare il 100% dell'impegno contrattuale massimo

oppure:

deve avere il fisso pagato o garantito
(nel caso dello STRIP deve inoltre versare il 100% dell'impegno contrattuale massimo, salvo conguaglio dell'eventuale eccedenza)

NOTE: L'avvenuto deposito va indicato sul fissato bollato.

Alla risposta premi, anche anticipata, i committenti hanno gli obblighi dei depositi per operazioni a termine fermo (100% del valore presunto, oppure, per il venditore a termine, consegna dei titoli entro 3 gg. di borsa aperta) e la liberazione dei depositi fatti per i premi.

(Fonte: Comitato Direttivo Agenti di Cambio Borsa Valori di Milano)

3. LE EQUIVALENZE DI BORSA

In questo paragrafo, sulla base di semplici considerazioni di arbitraggio, vengono derivate le condizioni di equilibrio tra le quotazioni dei diversi premi su uno stesso titolo. Nel primo paragrafo viene dimostrato come i contratti a premio doppio siano strutturalmente equivalenti a combinazioni dei contratti a premio semplice e come quindi l'importo di equilibrio del premio stellage, strip o strap possa essere espresso in funzione del premio dont e put. Nel secondo paragrafo viene quindi dimostrato come un contratto a premio put possa essere replicato da un portafoglio composto acquistando il dont, vendendo il titolo a termine fermo ed investendo o indebitandosi a tasso fisso. Questo risultato permette di determinare la relazione di equilibrio tra premio dont e premio put e di ricondurre il problema della determinazione dei premi a quello della determinazione del premio dont.

Al fine di concentrare l'attenzione sugli elementi fondamentali, in tutto il paragrafo si assumerà che non esistano oneri di transazione e che sia possibile investire ed indebitarsi allo stesso tasso di interesse.[15]

3.1. Le equivalenze di borsa

Al fine di rappresentare simbolicamente le implicazioni contrattuali dei diversi contratti a premio, sia:

T = data della risposta premi
$T+\tau$ = data di liquidazione del contratto a premio
S_t = prezzo al tempo t del titolo contrattato a premio
K = prezzo base del contratto a premio
P_D = importo del premio dont
P_P = importo del premio put
P_{Se} = importo del premio stellage
P_{Si} = importo del premio strip
P_{Sa} = importo del premio strap
D_t = valore al tempo t ($t \in [0,T]$) di un contratto dont
P_t = valore al tempo t ($t \in [0,T]$) di un contratto put
Se_t = valore al tempo t ($t \in [0,T]$) di un contratto stellage
Si_t = valore al tempo t ($t \in [0,T]$) di un contratto strip
Sa_t = valore al tempo t ($t \in [0,T]$) di un contratto strap

---

[15] Si noti che al fine di esaminare relazioni di arbitraggio, queste ipotesi, oltre ad essere convenienti, sono anche appropriate. Dato infatti un congruo periodo di aggiustamento, in un mercato efficiente le opportunità di arbitraggio esistenti saranno eliminate in modo che non esista più alcuna opportunità di profitto per gli operatori con minori oneri di transazione e più ridotto differenziale tra tassi attivi e passivi.
Le relazioni derivate in questo paragrafo sono comunque facilmente estensibili per considerare l'effetto degli oneri di transazione e del differenziale tra tassi attivi e passivi.

$B_t(T+\tau)$ = prezzo al tempo t di un discount bond con scadenza al tempo $T+\tau$

Le seguenti relazioni definiscono allora il valore finale di un contratto a premio alla scadenza:

(3.1) $D_T = \{\max[0,(S_T-K)]-P_D\}\cdot B_T(T+\tau).$

(3.2) $P_T = \{\max[(K-S_T),0]-P_P\}\cdot B_T(T+\tau).$

(3.3) $Se_T = \{\max[(K-S_T),(S_T-K)]-P_{Se}\}\cdot B_T(T+\tau),$

(3.4) $Si_T = \{\max[2(K-S_T),(S_T-K)]-P_{Si}\}\cdot B_T(T+\tau).$

(3.5) $Sa_T = \{\max[\frac{1}{2}(K-S_T),(S_T-K)]-P_{Sa}\}\cdot B_T(T+\tau).$

Ad esempio, il compratore di un premio dont abbandonerà i titoli se il giorno della risposta premi il loro corso è inferiore al prezzo base, mentre li ritirerà nel caso contrario. Nel primo caso, il contratto dont avrà alla scadenza un valore finale negativo, pari al valore attuale del premio dovuto in liquidazione; nel secondo, il valore del dont sarà pari al valore corrente di un contratto a termine fermo con prezzo a termine uguale alla base del premio, meno il valore attuale del premio. Poiché il valore di un contratto a termine fermo è pari al valore attuale della differenza tra corso corrente del titolo e prezzo base (giacché sarebbe possibile chiudere la posizione rivendendo i titoli ed ottenendo in liquidazione la differenza tra i due prezzi), risulta:

$$D_T = \begin{cases} -P_D\cdot B_T(T+\tau) & \text{se } S_T \leq K \\ (S_T - K - P_D)\cdot B_T(T+\tau) & \text{se } S_T > K \end{cases}$$

da cui la (3.1).

Si consideri ora il portafoglio composto acquistando un dont e un put con uguale scadenza e prezzo base ed acquistando (o vendendo) titoli a tasso fisso per un importo pari a $(P_D+P_P-P_{Se})B_0(T+\tau)$. Questo portafoglio comporta un esborso (o un guadagno) corrente pari a $(P_D+P_P-P_{Se})B_0(T+\tau)$ ed un valore finale alla data di risposta premi pari a:

$$\begin{aligned} &D_T+P_T+(P_D+P_P-P_{Se})\cdot B_T(T+\tau) = \\ &= [\max(0,S_T-K)+\max(0,K-S_T)-P_{Se}]\cdot B_T(T+\tau) = \\ &= \{\max[(K-S_T),(S_T-K)]-P_{Se}\}\cdot B_T(T+\tau) = Se_T. \end{aligned}$$

Un contratto a premio stellage può dunque essere esattamente replicato da un portafoglio composto acquistando un dont e un put ed acquistando (vendendo) titoli a tasso fisso. Poiché l'acquisto di uno stellage comporta un investimento nullo, in assenza di opportunità di arbitraggio anche l'investimento richiesto per la costituzione del portafoglio deve essere nullo. Pertanto:

(3.6) $$P_{Se} = P_D + P_P.$$

In altri termini, il premio stellage deve essere pari alla somma del premio dont e del premio put. Se infatti risultasse $P_{S_e}>P_D+P_P$, l'acquisto del portafoglio e la contemporanea vendita di uno stellage comporterebbero un guadagno immediato pari a $(P_{S_e}-P_D-P_P)\cdot B_T(T+\tau)$ ed un saldo nullo alla scadenza. Similmente, se risultasse $P_{S_e}<P_D+P_P$, l'acquisto di uno stellage e la contemporanea vendita del portafoglio comporterebbero un guadagno immediato pari a $-(P_{S_e}-P_D-P_P)\cdot B_T(T+\tau)$ al momento della stipulazione dei contratti ed un saldo nullo alla scadenza.

Un contratto a premio stellage è dunque del tutto equivalente alla combinazione di un premio dont e di un premio put.[16]

Analogamente, si dimostra che:

(3.7) $$P_{S_1} = P_D + 2P_P$$

e

(3.8) $$P_{S_e} = P_D + \frac{1}{2}P_P$$

e che l'acquisto di uno strip (di uno strap) su un certo quantitativo di titoli è equivalente all'acquisto di un portafoglio composto da un dont sullo stesso quantitativo di titoli e da un put su un quantitativo doppio (dimezzato).[17]

3.2. La parità teorica tra dont e put

Il problema della determinazione dei premi di equilibrio può essere ulteriormente semplificato dimostrando l'esistenza di una importante relazione di arbitraggio che lega tra loro il valore di un dont e di un put, su uno stesso titolo, aventi uguale scadenza e prezzo base.

Oltre alle ipotesi precedenti (oneri di transazione nulli, uguaglianza tra tassi d'interesse attivi e passivi), si assuma che sia sempre osservabile il prezzo a termine del titolo per la liquidazione del mese in cui scade il contratto a premio; in altri termini, si assuma che sia sempre possibile stipulare un contratto di riporto con il quale prorogare la posizione dalla liquidazione corrente a quella del mese in cui scade il contratto a premio. Indicando con F_t tale prezzo a termine, con r' il tasso di riporto sul titolo al tempo t e con δ il tempo che separa la data di liquidazione del contratto a premio dalla liquidazione corrente, si ha:

(3.9) $$F_t = S_t\cdot e^{r'\cdot\delta} = S_t+I_R$$

---

[16] In effetti, a differenza della combinazione in parola, lo stellage non permette l'abbandono del contratto. Si è comunque visto che tale facoltà addizionale ha un valore economico trascurabile, e questo permette di sostenere l'equivalenza.

[17] Anche nel caso dello strip e dello strap viene a mancare la possibilità di abbandono, ma a questo riguardo vale quanto si è detto a proposito dello stellage.

dove I_R sono gli interessi di riporto.

Nelle relazioni di arbitraggio derivate in questo e nel successivo paragrafo si considera F_t e non S_t come variabile rilevante, al fine di tener conto della possibile diversa scadenza delle operazioni a premio e di quelle a termine fermo. Poiché una operazione a premio può essere stipulata per una liquidazione successiva a quella corrente, l'operazione a termine fermo dovrà eventualmente essere prorogata tramite un contratto di riporto per essere riferita alla stessa scadenza temporale. Pertanto F_t è il costo da sostenersi per avere il titolo disponibile alla data di liquidazione dell'operazione a premio. Ovviamente, se il premio è stipulato per fine corrente (cosicché $\delta=0$) risulta $F_t=S_t$. Si noti inoltre che alla data di risposta premi risulta comunque $F_T=S_T$.

Si assuma infine che dal titolo non vengano staccati dividendi o altri diritti nel periodo considerato. Tale ipotesi implica che non risulterà in alcun caso conveniente la risposta anticipata e ciò consentirà di trascurare questa possibilità nel seguito della trattazione. Si ha infatti il seguente lemma:

<u>Lemma 1:</u> Se dal titolo contrattato a premio non vengono staccati dividendi o altri diritti nel periodo considerato, la risposta anticipata non è mai conveniente.

<u>Dimostrazione:</u> Per effetto della risposta anticipata, il contratto a premio si trasforma in un contratto a termine fermo per la data di liquidazione del contratto a premio. Il valore corrente di un premio dont esercitato è perciò $(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$. E' tuttavia semplice verificare che questo valore è sempre inferiore a quello del dont non esercitato, a meno che non vengano staccate cedole prima della scadenza dell'opzione. Se risultasse infatti $D_t<(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$, il portafoglio composto acquistando il contratto a premio dont, vendendo a termine fermo il titolo e prendendo in prestito un importo pari a $(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$ assicurerebbe un guadagno immediato ed un saldo non negativo alla scadenza (si veda la tabella 3.1). Pertanto, in assenza di opportunità di arbitraggio, deve essere $D_t\geq(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$: la risposta anticipata non è quindi mai conveniente nell'ipotesi considerata.

Si noti invece che se il titolo stacca una cedola prima della risposta premi, il saldo finale del portafoglio risulta non negativo solo se viene data la risposta anticipata sul dont acquistato. Si supponga infatti che il titolo stacchi una cedola di importo X alla data t' (0<t'<T) e che il pagamento della cedola avvenga in via immediata. Poiché l'acquirente a termine ha diritto all'importo della cedola, mentre l'acquirente a premio ha diritto (ove non opti per la

risposta anticipata) solo ad una decurtazione della base del premio, il valore finale del precedente portafoglio sarà pari a

$$\{\max[0,F_T-(K-X)]-P_D-[F_T+X/B_t\cdot(T+\tau)-F_t]-(F_t-K-P_D)\}B_T(T+\tau) =$$
$$= \{\max[0,F_T-K+X]-[F_T-K+X/B_t\,(T+\tau)]\}B_T(T+\tau)$$

che non è più necessariamente non negativo. Una cedola di importo rilevante può quindi giustificare la risposta anticipata. <u>Fine della dimostrazione.</u>

Tabella 3.1:
Dimostrazione della relazione $D_t \geq (F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$

Composizione del portafoglio	Guadagno/esborso corrente	Valore finale $F_T<K$	Valore finale $F_T \geq K$
Compra il dont	$-D_t$	$-P_D B_T(T+\tau)$	$(F_T-K-P_D)B_T(T+\tau)$
Vendi il fisso	0	$-(F_T-F_t)B_T(T+\tau)$	$-(F_T-F_t)B_T(T+\tau)$
Prendi in prestito $(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$	$(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)$	$-(F_t-K-P_D)B_T(T+\tau)$	$-(F_T-K-P_D)B_T(T+\tau)$
Totale	$(F_t-K-P_D)B_t(T+\tau)-D_t$	$(K-F_T)B_T(T+\tau)$	0

Date queste ipotesi, è possibile dimostrare il seguente teorema.

<u>Teorema 1</u>: Il premio di un put è uguale al premio di un dont con uguale base e uguale scadenza, meno la differenza tra prezzo a termine del titolo e prezzo base:

$$P_P = P_D - (F_0-K) \tag{3.10}$$

<u>Dimostrazione:</u> Si consideri il portafoglio composto acquistando un dont, vendendo a termine fermo il titolo ed acquistando (vendendo) titoli a tasso fisso per un importo pari a $(K-F_0+P_D-P_P)B_0(T+\tau)$. Questo portafoglio comporta un esborso (guadagno) corrente pari a $(K-F_0+P_D-P_P)B_0(T+\tau)$ ed un valore finale alla data di risposta premi pari a:

$$\{[\max(0,F_T-K)-P_D]-(F_T-F_0)+(K-F_0+P_D-P_P)\}B_T(T+\tau)=$$
$$= [\max(0,K-F_T)-P_P]B_T(T+\tau) = P_T.$$

Un contratto a premio put può quindi essere replicato da un portafoglio composto acquistando un dont, vendendo a termine il titolo e acquistando (vendendo) titoli a reddito fisso. Poiché l'acquisto di un put comporta un esborso nullo al momento della stipulazione, in assenza di opportunità di arbitraggio anche il valore corrente del portafoglio deve essere nullo: $K-F_0+P_D-P_P=0$. Fine della dimostrazione.

L'equazione 3.10 esprime la c.d. parità dont-put. Se questa relazione fosse violata dal mercato, sarebbe possibile ottenere un profitto immediato a rischio nullo vendendo il premio sopravvalutato ed acquistando il premio sottovalutato.

Ricordando la relazione 3.9, la parità dont-put può essere riscritta nel modo seguente:

$$P_P = P_D - (S_0-K) - I_R.$$

Dunque, se i due premi sono stipulati per fine corrente, cosicché $I_R=0$, e la base dei due premi è uguale al prezzo corrente del titolo, il premio put è uguale al premio dont. Se $F_0>K$, $P_P<P_D$, mentre se $F_0<K$, $P_P>P_D$.

La parità dont-put permette di esprimere l'importo di equilibrio di ogni premio come funzione dell'importo di equilibrio del premio dont. Sostituendo l'equazione 3.10 nelle relazioni 3.6, 3.7 e 3.8 risulta:

$$P_{Se} = 2P_D-(F_0-K) \qquad (3.11)$$
$$P_{Si} = 3P_D-2(F_0-K) \qquad (3.12)$$
$$P_{Sa} = {}^3/_2P_D-½(F_0-K). \qquad (3.13)$$

Le relazioni di arbitraggio finora dimostrate implicano che i contratti a premio put e quelli a premio doppio possono essere replicati da opportuni portafogli composti acquistando il dont, vendendo il titolo a termine fermo ed acquistando (vendendo) titoli a reddito fisso. Queste equivalenze consentono agli intermediari di borsa di offrire premi put, stellage, strip e strap ai loro clienti ponendo in essere delle combinazioni di tipo chiuso (ossia prive di rischio), acquistando i fattori di trasformazione e vendendo il premio composto, o viceversa.

La tabella 3.2 illustra i fattori di trasformazione delle varie operazioni a premio nelle operazioni composte equivalenti. I valori numerici indicano il numero di azioni contrattate a premio o a termine fermo. Valori positivi indicano acquisti, valori negativi vendite.

Tabella 3.2: Fattori di trasformazione delle operazioni elementari in contratti a premio dont e vendite a fermo

	Fermo	Dont
Dont	-	1
Put	-1	1
Stellage	-1	2
Strip	-2	3
Strap	-½	$^3/_2$

4. LA VALUTAZIONE DEI CONTRATTI A PREMIO DONT

In questo paragrafo, l'Option Pricing Theory viene impiegata per valutare i contratti a premio dont. La risultante formula di valutazione consente non solo una soluzione definita al problema della determinazione dei premi di equilibrio, ma fornisce anche un metodo di selezione dei contratti sopra o sottovalutati, cioè di quei contratti che offrono l'opportunità immediata di profitti di arbitraggio a rischio nullo.

La derivazione nel paragrafo 4.1 si basa su un'applicazione del modello binomiale proposto da Cox-Ross-Rubinstein.[18] L'ipotesi di un semplice processo a parametro discreto per il prezzo del titolo contrattato a premio consente di evitare il ricorso al calcolo differenziale e di chiarire i processi di arbitraggio che sono alla base del modello di valutazione. Il modello risultante può inoltre essere facilmente modificato per tener conto degli oneri di transazione o di altre imperfezioni di mercato. Nel paragrafo 4.2 viene mostrato come il modello includa come particolare caso limite l'ipotesi di un processo a parametro continuo identico a quello originariamente assunto da Black-Scholes.

Nel paragrafo 4.3 la formula ottenuta viene risolta per il valore del premio di equilibrio. Una verifica empirica della formula derivata è contenuta nel paragrafo 5.

4.1. Il modello binomiale

Come nel precedente paragrafo, si assuma che non esistano oneri di transazione, che sia possibile investire ed indebitarsi allo stesso tasso di interesse (costante nel tempo), che sia sempre osservabile il prezzo a termine dell'azione per la liquidazione del mese in cui scade il con-

[18] Cfr. J.C. Cox, S.A. Ross e M. Rubinstein (1979).

tratto a premio e che il titolo non distribuisca dividendi nel periodo considerato. Si assuma inoltre che il prezzo a termine dell'azione segua un semplice processo binomiale moltiplicativo a parametro discreto. In ogni periodo il rendimento dell'azione può avere solo due possibili valori: u-1, con probabilità q, o d-1, con probabilità 1-q. Se il prezzo corrente a termine dell'azione è F, il prezzo alla fine del periodo sarà pertanto uF o dF:

$$F < \begin{array}{ll} uF & \text{con probabilità } q \\ dF & \text{con probabilità } 1-q. \end{array}$$

Al fine di assicurare l'equilibrio, si assuma inoltre che sia: $u>1>d$.[19]

4.1.1. L'idea fondamentale

Per illustrare la tecnica di valutazione di un contratto a premio dont su questo titolo, si consideri il caso di un contratto con un solo un periodo di vita residua prima della risposta premi. Sia $D(F,K,1,P_D)$ il valore corrente del dont, D^*_u il suo valore finale se il prezzo dell'azione risulta pari a uF, e D^*_d il suo valore finale se il prezzo dell'azione risulta pari a dF. Indicando con $\hat{r}$ il tasso di interesse su un periodo e con τ il numero di periodi intercorrenti tra la data della risposta premi e la data di liquidazione, abbiamo:

$$D(F,K,1,P_D) < \begin{array}{l} D^*_u=\{\max[0,(uF-K)]-P_D\}(1+\hat{r})^{-\tau} \\ D^*_d=\{\max[0,(dF-K)]-P_D\}(1+\hat{r})^{-\tau}. \end{array}$$

Si supponga ora di formare un portafoglio P_1 composto dall'acquisto di α azioni a termine fermo e dall'acquisto (vendita) di β titoli a reddito fisso, in modo tale che il valore finale del portafoglio P_1 duplichi esattamente il valore finale del contratto a premio. Occorre pertanto che:

$$\alpha(uF-F)(1+\hat{r})^{-\tau}+\beta(1+\hat{r})=D^*_u$$

e

$$\alpha(dF-F)(1+\hat{r})^{-\tau}+\beta(1+\hat{r})=D^*_d.$$

Risolvendo queste due equazioni, si ha:

$$\alpha=(D^*_u-D^*_d)/[(u-d)F(1+\hat{r})^{-\tau}]$$

e

$$\beta=\{[(1-d)/(u-d)]D^*_u+[(u-1)/(u-d)]D^*_d\}/(1+\hat{r}).$$

---

[19] Se così non fosse, l'acquisto a termine di una azione al prezzo F comporterebbe un investimento nullo ed un guadagno o una perdita certa alla scadenza, situazione questa ovviamente incompatibile con l'equilibrio.

L'ultima relazione può essere semplificata ponendo $p=(1-d)/(u-d)$, e riscrivendo:

$$\beta=[pD^{*}_{u}+(1-p)D^{*}_{d}]/(1+\hat{r}).$$

Con α e β scelti in questo modo, si ottiene quello che nel seguito verrà chiamato portafoglio equivalente, ossia un portafoglio in grado di duplicare esattamente il valore alla scadenza di un contratto a premio dont, per ogni possibile valore del titolo sottostante.

Poiché il contratto dont ed il portafoglio P_1 sono due attività equivalenti (essendo il loro valore finale uguale in ogni possibile situazione[20]), definiamo il valore corrente del contratto a premio $D(F,K,1,P_D)$ come il valore corrente del portafoglio P_1:

$$D(F,K,1,P_D)=P_1=[pD^{*}_{u}+(1-p)D^{*}_{d}]/(1+\hat{r}). \tag{4.1}$$

4.1.2. La formula binomiale

Si consideri ora il caso di un dont con due periodi di vita residua prima della risposta premi.

Date le ipotesi sul comportamento del prezzo a termine, vi sono tre possibili valori che F può assumere alla fine del secondo periodo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & u^2F \\ & & uF & < & \\ F & < & & & udF \\ & & dF & < & \\ & & & & d^2F \end{array}$$

In maniera analoga, per il dont risulta:

$$\begin{array}{lll} & & D^{*}_{uu}=\{\max[0,(u^2F-K)]-P_D\}(1+\hat{r})^{-1} \\ & D_u=D(uF,K,1,P_D) < & \\ D(F,K,2,P_D)< & & D^{*}_{ud}=\{\max[0,(udF-K)]-P_D\}(1+\hat{r})^{-1} \\ & D_d=D(dF,K,1,P_D) < & \\ & & D^{*}_{dd}=\{\max[0,(d^2F-K)]-P_D\}(1+\hat{r})^{-1} \end{array}$$

Per individuare un portafoglio P_2 il cui valore finale duplichi quello del contratto a premio occorre scegliere le quantità α e β in modo che il suo valore alla fine del primo periodo sia pari all'importo necessario per acquistare il nuovo portafoglio P_1, equivalente ad un dont con un solo periodo di vita residua.

Dalla (4.1) si ha che:

---

[20] Si ricordi (§ 3.2) che, se dal titolo contrattato a premio non vengono staccati dividendi o altri diritti, la risposta anticipata non risulta mai conveniente.

$$P_1 = \begin{cases} D_u=[pD^*_{uu}+(1-p)D^*_{ud}]/(1+\hat{r}) & \text{se il prezzo del titolo è } uF \\ D_d=[pD^*_{du}+(1-p)D^*_{dd}]/(1+\hat{r}) & \text{se il prezzo del titolo è } dF. \end{cases}$$

Si scelga dunque il portafoglio P_2 in modo tale che il suo valore alla fine del primo periodo sia D_u se il prezzo a termine dell'azione risulta pari a uF e D_d se il prezzo a termine risulta pari a dF.

Ponendo:

$$\alpha(uF-F)(1+\hat{r})^{-(1+\tau)}+\beta(1+\hat{r})=D_u$$

e:

$$\alpha(dF-F)(1+\hat{r})^{-(1+\tau)}+\beta(1+\hat{r})=D_d$$

abbiamo:

$$\alpha=(D_u-D_d)/[(u-d)F(1+\hat{r})^{-(1+\tau)}]$$

e:

$$\beta=[pD_u+(1-p)D_d]/(1+\hat{r}).$$

Si è quindi individuata una strategia in grado di replicare, in ogni possibile circostanza, il valore finale di un contratto dont con due periodi di vita residua. L'unica differenza rispetto al caso precedente di un dont con un solo periodo di vita residua è che alla fine del periodo corrente occorrerà liquidare il portafoglio P_2 ed acquistare il nuovo portafoglio P_1 che verrà mantenuto per il periodo successivo. In nessuna circostanza il riaggiustamento del portafoglio comporterà esborsi di denaro: il valore del portafoglio P_2 alla fine del primo periodo sarà sempre esattamente sufficiente a permettere l'acquisto del nuovo portafoglio P_1.

Si può quindi scrivere:

$$D(F,K,2,P_D)=P_2=[pD_u+(1-p)D_d]/(1+\hat{r})=$$

$$=[p^2D^*_{uu}+2p(1-p)D^*_{ud}+(1-p)^2D^*_{dd}]/(1+\hat{r})^2=$$

$$=\{p^2\max[0,(u^2F-K)]+2p(1-p)\max[0,(udF-K)]+$$

$$+(1-p)^2\max[0,(d^2F-K)]-P_D\}/(1+\hat{r})^{2+\tau}.$$

Esiste quindi una procedura iterativa per determinare il valore di un dont con un numero arbitrario di periodi alla scadenza. Partendo dalla data della risposta premi e procedendo all'indietro, si può scrivere la formula di valutazione di un dont per n arbitrario:

(4.2) $$D(F,K,n,P_D)=$$
$$=\{\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\max[0,(u^jd^{n-j}F-K)]-P_D\}/(1+\hat{r})^{(n+\tau)}$$

dove $\binom{n}{j}=n!/[j!(n-j)!]$ è il coefficiente binomiale.

La composizione del portafoglio equivalente viene determinata da:

(4.3) $$\alpha = (D_u - D_d)/[(u-d)F(1+\hat{r})^{-(n-1+\tau)}]$$

$$\beta = [pD_u + (1-p)D_d]/(1+\hat{r}).$$

La (4.2) rappresenta la formula di valutazione di un contratto a premio dont. Essa può essere riscritta nel modo seguente (v. Appendice):

(4.4)

$$D(F,K,n,P_D) = \{F\Phi[a;n,p'] - K\Phi[a;n,p] - P_D\}/(1+\hat{r})^{(n+\tau)}$$

dove: $p=(1-d)/(u-d)$, $p'=up$
a è il più piccolo intero non negativo maggiore di $\ln[K/(Fd^n)]/\ln(u/d)$
$\Phi[.]$ è la complementare della funzione di ripartizione binomiale

4.2. La formula di valutazione nel continuo

L'ipotesi di un processo binomiale per il prezzo dell'azione ha permesso di derivare una formula per la valutazione di un contratto a premio dont e di illustrare le argomentazioni di arbitraggio che ne sono alla base.

D'altra parte, poiché le contrattazioni su di un titolo hanno luogo più o meno continuamente, piuttosto che ad intervalli discreti, potrebbe sembrare più idonea l'ipotesi di un processo a parametro continuo anziché discreto. Questa ipotesi può essere considerata come un caso limite del modello binomiale quando l'intervallo temporale tra due successive variazioni nel prezzo dell'azione diviene sempre più piccolo, tendendo a zero.

In termini più precisi, sia h la lunghezza dell'intervallo temporale tra due successive variazioni di prezzo. In base alla precedente simbologia, se (T-t) è il tempo mancante alla scadenza ed n è il numero di periodi di lunghezza h mancanti alla scadenza, allora è $h=(T-t)/n$. Nell'Appendice verrà mostrato che, quando le contrattazioni hanno luogo sempre più frequentemente, cosicché h diviene sempre più piccolo e n tende ad infinito, la (4.4) tende alla seguente formula di valutazione nel continuo:

(4.5)

$$\boxed{\begin{gathered} D(F_t,K,T-t,P_D)=e^{-r(T+\tau-t)}\{F_t\cdot N(x)-K\cdot N[x-\sigma\surd(T-t)]-P_D\} \\ x=[\ln(F_t/K)+{}^1/_2\sigma^2(T-t)]/[\sigma\surd(T-t)]. \end{gathered}}$$

4.3. I premi di equilibrio

La formula di valutazione può essere utilizzata per la determinazione dei premi di equilibrio. Si ricordi infatti che, come nel caso dei contratti a termine fermo, nessuno scambio di denaro ha luogo tra le controparti al momento della conclusione di un contratto a premio: il premio si determina dunque in Borsa in modo da rendere nullo il valore del contratto alla data di stipulazione. Ponendo la condizione di equilibrio:

$$D(F_0,K,T,\hat{P}_D)=0,$$

e risolvendo la (4.5) per $\hat{P}_D$ si ottiene:

(4.6)

$$\boxed{\begin{gathered} \hat{P}_D=F_0\cdot N(x)-K\cdot N(x-\sigma\surd T) \\ x=[\ln(F_0/K)+{}^1/_2\sigma^2 T]/(\sigma\surd T) \end{gathered}}$$

L'equazione 4.6 fornisce l'importo del premio dont di equilibrio. Ogni qual volta il premio di mercato diverge dal suo valore di equilibrio, diviene possibile, nelle ipotesi fatte, realizzare un profitto immediato a rischio nullo vendendo il dont ed acquistando il portafoglio equivalente (se risulta D<0) o acquistando il dont e vendendo il portafoglio equivalente (se risulta D>0). In tali circostanze, la strategia richiamata procura infatti un profitto pari al valore del portafoglio ed un saldo nullo alla chiusura della posizione.

Il premio di equilibrio espresso dalla 4.6 risulta essere funzione crescente del prezzo a termine F e della volatilità del titolo σ, e funzione decrescente del prezzo base K. L'effetto sul premio di equilibrio dell'allungamento della scadenza del contratto è invece in generale incerto.[21]

La tabella 4.1 fornisce un esempio dei valori ottenuti dalla formula (4.6), dato il prezzo per fine corrente del

---

[21] Una condizione sufficiente perché risulti $\delta\hat{P}_D/\delta T>0$ è che sia $r'>-\sigma N'(x)/[2\surd T\cdot N(x)]$.

titolo, per diverse ipotesi del prezzo base, dei giorni mancanti alla risposta premi, della volatilità del titolo e del tasso di riporto.

Tabella 4.1: Valori di equilibrio del premio dont[ee]

S = 1.000		Tasso di riporto (r')														
		-10%			-5%			5%			10%			15%		
		Scadenza (T*365)														
σ	K	30	60	90	30	60	90	30	60	90	30	60	90	30	60	90
	900	93	89	87	97	96	97	105	111	118	109	119	129	113	127	141
0,20	1.000	19	25	28	21	28	34	25	37	46	27	42	54	30	47	52
	1.100	1	3	6	1	4	7	1	6	12	2	8	15	2	9	18
	900	104	112	118	107	118	127	114	130	145	118	137	154	121	144	164
0,40	1.000	42	56	67	44	60	73	48	69	86	50	74	93	52	79	101
	1.100	12	25	34	13	27	38	15	32	47	16	35	52	17	38	57
	900	121	139	153	124	145	161	130	156	178	133	162	187	136	169	196
0,60	1.000	64	88	105	66	92	112	71	101	125	73	106	133	75	111	140
	1.100	30	53	70	31	56	75	34	63	86	35	66	92	37	70	98

5. UNA VERIFICA EMPIRICA

In questo paragrafo, la formula derivata nel paragrafo precedente per la determinazione dei premi di equilibrio viene sottoposta ad una verifica empirica.

Nel primo paragrafo vengono descritti i dati utilizzati per il test e nel secondo viene presentata la metodologia impiegata per il calcolo della volatilità σ, che costituisce l'unico parametro del modello non direttamente osservabile.

Nel terzo paragrafo si effettua quindi un confronto tra i premi risultanti dal modello ed i premi di mercato. Viene in particolare verificata l'esistenza di relazioni sistematiche tra gli scostamenti percentuali tra premi di mercato e premi teorici e le singole variabili del modello di valutazione.

[ee] I valori riportati nella tabella sono stati calcolati sulla base della ipotesi che sia δ=T.

Il quarto paragrafo presenta un test della efficienza del mercato dei premi attraverso la verifica della possibilità di utilizzare il modello per ottenere profitti di arbitraggio a rischio nullo. Questo tipo di test si basa sulla costruzione di portafogli composti acquistando i premi "sottovalutati" (o vendendo i premi "sopravvalutati") e vendendo (o acquistando) a termine fermo i titoli sottostanti in una proporzione tale da rendere le posizioni combinate prive di rischio. Poiché questi portafogli richiedono un investimento iniziale nullo, in un mercato efficiente essi dovrebbero offrire un rendimento nullo. L'analisi dei rendimenti ottenibili fornisce pertanto un test della efficienza del mercato dei premi della Borsa Valori di Milano.

Infine, il quinto paragrafo contiene alcune considerazioni sui risultati ottenuti, mettendo in evidenza i limiti dell'analisi effettuata ai fini di una corretta interpretazione dei risultati stessi.

5.1. Dati utilizzati

I dati utilizzati in questo paragrafo sono quelli riportati da Il Sole-24 Ore relativamente ai contratti a premio dont stipulati alla Borsa di Milano l'ultimo giorno di ogni settimana sui tre titoli a più ampio mercato (di seguito indicati con i simboli A, B e C). Il periodo sotto osservazione ha riguardato gli otto mesi borsistici dall'agosto 1986 al marzo 1987.

Il campione così ottenuto risulta composto da 316 contratti a premio, di cui 114 sul titolo A, 110 sul titolo B e 92 sul titolo C.

Poiché per i premi non esiste un valore di chiusura, come riferimento per tutte le analisi successive si è utilizzato un premio medio calcolato come semisomma del premio minimo e massimo riportato.

Alcune statistiche descrittive del campione sono riportate nella tabella 5.1. In media, la base del premio tende ad essere leggermente superiore al corso corrente del titolo, mentre la durata media dei contratti si aggira sui 33 giorni (calendario civile).

Tabella 5.1: Distribuzione dei parametri relativi ai 316 dont del campione

	Titolo A				Titolo B				Titolo C			
	P_D	S	K	T*365	P_D	S	K	T*365	P_D	S	K	T*365
Media	541	14.350	14.575	33	4.846	137.179	138.686	32	157	3.169	3.215	33
Sqm	291	1.021	1.161	12	3.037	14.788	15.709	13	112	322	362	14
Sqm/Media	0,538	0,071	,080		0,627	0,108	0,113		0,716	0,102	0,113	
Quartili:												
0,25	300	13.600	13.500	24	2.500	130.800	130.000	24	65	2.876	3.000	21
0,50	518	14.303	14.500	33	4.125	134.000	135.000	33	128	3.085	3.000	32
0,75	725	15.405	15.500	42	6.500	139.200	145.000	42	210	3.492	3.500	42

I tassi di riporto sui titoli sono stati considerati uguali ai tassi d'interesse correnti. Per le azioni inserite nel campione questa condizione risulta appropriata, dato che per esse, nelle apposite riunioni di Borsa effettuate nel periodo in esame, non sono mài stati rilevati tassi di riporto diversi dai tassi d'interesse correnti.

Per i tassi d'interesse si sono rilevati settimanalmente i tassi di rendimento dei BOT con scadenza più prossima ad un mese (che rappresenta la durata media dei contratti a premio presenti nel campione) e li si sono poi convertiti nei tassi istantanei equivalenti.

Una importante limitazione dei dati utilizzati deve essere sottolineata. La formula di valutazione richiede che sia noto il prezzo del titolo all'istante esatto della stipulazione del relativo contratto a premio. In questa verifica sono stati invece utilizzati i prezzi di chiusura; nella misura in cui i prezzi di listino sono differenti dai prezzi correnti al momento della stipulazione dei contratti a premio, i dati risultano viziati da un certo errore di asincronia.

5.2. Stima della volatilità

Per quanto riguarda la volatilità attesa dei rendimenti delle azioni, una stima può essere ottenuta analizzando la serie storica dei rendimenti azionari in un dato periodo di tempo.[23] Black e Scholes[24] usano questo tipo di stima nel verificare il loro modello di valutazione ma arrivano alla conclusione che una porzione rilevante delle deviazioni dei prezzi teorici da quelli di mercato sia dovuta ad errori nella stima di questo parametro.

Un approccio alternativo consiste nel derivare una stima della volatilità attesa utilizzando i premi correnti di mercato: la volatilità implicita (ISD, implied standard deviation) è quel valore della volatilità che rende il premio teorico uguale al premio corrente di mercato. Sebbene la formula (4.6) non possa essere esplicitata rispetto a σ, è tuttavia possibile utilizzare una procedura numerica per approssimarne il valore.

In un mercato efficiente, i prezzi di mercato riflettono tutte le informazioni disponibili. Pertanto le volatilità implicite nei premi di mercato dovrebbero riflettere non solo il contenuto informativo dei rendimenti passati ma anche ogni altra informazione disponibile. Appare pertanto logico attendersi che le volatilità implicite riflettano la volatilità futura più accuratamente delle volatilità calcolate su dati storici.[25]

Se le ipotesi alla base del modello fossero pienamente valide ed il mercato perfettamente efficiente, allora in ogni istante tutti i premi su uno stesso titolo sarebbero determinati sulla base di una stessa volatilità implicita. Poiché tuttavia questo difficilmente accade nella realtà, sorge il problema della scelta di una qualche media delle singole ISD rilevabili ad un dato istante.

In concreto, si è proceduto nel modo seguente:

- Dapprima, per ciascuno dei 316 premi del campione si è determinata la volatilità implicita ricercando mediante un algoritmo newtoniano (con un criterio di tolleranza dello 0,0001) il valore di σ che assicurasse l'uguaglianza del premio teorico risultante dalla (4.6) con il premio di mercato.[26]

[23] Per la stima della volatilità su dati storici occorre tener presente che i prezzi di Borsa presentano una discontinuità in corrispondenza dell'inizio di ciascun mese borsistico (cfr. Appendice).

[24] Cfr. F. Black e M. Scholes (1972).

[25] Alcune verifiche empiriche dimostrano, per i mercati americani, una netta superiorità delle volatilità implicite rispetto alle volatilità storiche. Latané-Rendleman (1976) e Chiras-Manaster (1978) analizzano la correlazione esistente tra volatilità storica e volatilità implicita da un lato e volatilità effettiva dall'altro (calcolata ex post sulla base dei rendimenti effettivi del titolo nell'arco di vita dell'opzione) e concludono univocamente che la volatilità implicita è un previsore nettamente superiore. Anche nel caso dei titoli considerati in questa parte empirica la capacità previsiva della volatilità storica è risultata, in base ad una analisi preliminare, inferiore a quella della volatilità implicita ponderata.

[26] La ricerca della volatilità implicita non ammette soluzione ogni qual volta il premio di mercato cade al di fuori dei limiti teorici, ossia ogni qual volta risulta $P_0>F_0$ o $P_0<F_0-K$. Nel campione considerato, in un solo caso il procedimento è risultato non convergente. Anche in questo caso,

- Quindi, per ciascun giorno di rilevazione, le ISD calcolate sui diversi premi negoziati per ciascun titolo sono state utilizzate per ottenere una volatilità implicita ponderata (WISD, <u>weighted implied standard deviation</u>), calcolata come media delle ISD ponderate per la elasticità del premio rispetto alla volatilità:

$$WISD = \Sigma_j(\sigma_j \cdot \delta P_{Dj}/\delta\sigma_j \cdot \sigma_j/P_{Dj})/\Sigma(_j\delta P_{Dj}/\delta\sigma_j \cdot \sigma_j/P_{Dj})$$

  dove m è il numero dei contratti a premio stipulati per lo stesso titolo.
  In questo modo, le volatilità implicite nei premi teoricamente più sensibili al valore di σ ricevono una ponderazione maggiore. La ragione è che i premi i cui valori sono poco sensibili alla volatilità (essenzialmente dont la cui base è molto al di sotto del corso corrente del titolo e con scadenza prossima), sono verosimilmente meno rappresentativi delle aspettative del mercato.[87]

I risultati relativi al calcolo delle WISD sono sintetizzati nella tabella 5.2, che illustra alcune statistiche relative alla distribuzione delle WISD ottenute per ciascun titolo.

Tabella 5.2: Distribuzione delle WISD calcolate utilizzando i dati del campione

		Titolo A	Titolo B	Titolo C
Media		0,3290	0,2827	0,3988
Deviazione std		0,0843	0,0942	0,0947
Quartili	0,25	0,2514	0,1967	0,3185
	0,50	0,3109	0,2744	0,4368
	0,75	0,3999	0,3432	0,4788
N. medio ISD utilizzate		3,26	3,11	2,63

comunque, l'adozione di un premio leggermente superiore a quello medio (e comunque inferiore a quello massimo riportato) avrebbe assicurato la convergenza, riflettendo così non simultaneità tra le variabili.

[87] Questo schema di ponderazione è stato originariamente proposto da D.P. Chiras e S. Manaster (1978).

Ai fini delle successive analisi si è utilizzata la WISD calcolata sulla base dei contratti stipulati l'ultimo giorno della settimana precedente a quella in cui viene effettuata la valutazione. L'uso delle volatilità implicite calcolate sulla base dei premi rilevati il giorno stesso di valutazione non solo avrebbe portato ad eliminare dal campione, per un dato giorno, i titoli sui quali fosse stato negoziato un solo contratto a premio (giacché in tal caso il premio teorico sarebbe risultato uguale al premio effettivo), ma avrebbe inficiato l'analisi sulla efficienza del mercato, portando ad utilizzare informazioni non ancora disponibili nel momento in cui occorre selezionare i contratti sopravvalutati o sottovalutati.

5.3. Confronto tra premi teorici e premi di mercato

Usando le volatilità implicite calcolate sulla base della procedura descritta nel paragrafo precedente, per ciascuno dei dont del campione è stato calcolato il premio teorico P_D risultante dalla formula (4.6). I risultati di questa analisi sono sintetizzati nella tabella 5.3, che per ciascun titolo e per il campione complessivo riporta la media, la deviazione standard ed i quartili della distribuzione dei premi di mercato (P_D), dei premi teorici ($\hat{P}_D$) e della deviazione percentuale del premio di mercato da quello teorico [$Err\%=(P_D-\hat{P}_D)/\hat{P}_D$].

Tabella 5.3: Confronto tra premi di mercato e premi teorici

	Titolo A			Titolo B			Titolo C			Complessivo		
	P_D	$\hat{P}_D$	Err%	P_D	$\hat{P}_D$	Err%	P_D	$\hat{P}_D$	Err%	P_D	$\hat{P}_D$	Err%
Media	541	528	2,37%	4846	4816	0,22%	157	155	0,19%	1928	1912	0,99%
Dev.ne std	292	250	29,15%	3051	2758	19,59%	113	322	28,01%	2800	2688	25,79%
Quartili:												
0,25	300	345	-13,55%	2500	2943	-13,42%	65	81	-16,62%	205	221	-15,30%
0,50	518	500	-0,92%	4125	4297	-2,24%	128	142	-4,04%	550	543	-1,90%
0,75	725	663	14,89%	6500	6191	10,97%	210	218	9,97%	2950	3083	13,04%

La formula di valutazione fornisce quindi valori che risultano in media molto vicini a quelli di mercato, con un errore percentuale medio generalmente inferiore all'1%. Nel

50% dei casi la deviazione percentuale tra premi di mercato e premi teorici risulta inferiore in valore assoluto al 15%.[28]

Al fine di esaminare più accuratamente le differenze tra i premi di mercato e i premi teorici, per ciascun titolo e per il campione nel suo complesso sono state stimate le seguenti rette di regressione:

Test 1: $P_j/K_j = b_0+b_1\hat{P}_j/K_j+u_j$,

Test 2: $(P_j-\hat{P}_j)/\hat{P}_j = b_0+b_1(S_j-K_j)/K_j+u_j$,

Test 3: $(P_j-\hat{P}_j)/\hat{P}_j = b_0+b_1(T_j*365)+u_j$,

Test 4: $(P_j-\hat{P}_j)/\hat{P}_j = b_0+b_1\sigma_j+u_j$.

Test 5: $(P_j-\hat{P}_j)/\hat{P}_j = b_0+b_1 l_j+u_j$.

La regressione dei premi di mercato standardizzati sui premi teorici standardizzati (test 1) ha lo scopo di analizzare la rispondenza del modello alle valutazioni operate dal mercato.[29] Se i premi di mercato fossero esattamente uguali a quelli teorici, b_0 e b_1 non dovrebbero risultare diversi da zero e uno, rispettivamente. Una intercetta positiva (negativa) ed un coefficiente maggiore (minore) di 1 indicano invece una tendenza del modello a sottovalutare (sopravvalutare) sistematicamente i premi.

I test 2, 3 e 4 sono diretti a verificare l'esistenza di relazioni sistematiche tra la deviazione percentuale del premio di mercato dal premio teorico e le variabili del modello, F, K, T e σ.

Il test 5 ha invece lo scopo di individuare la presenza di una relazione significativa tra lo scostamento tra premio di mercato e premio teorico e la fase del mese borsistico (l esprime il numero dei giorni mancanti alla liquidazione corrente).

I risultati di questi test sono sintetizzati nella tabella 5.4. Per ciascuna regressione e per ciascun titolo, oltre che per il campione nel suo complesso, vengono riportati la stima dei parametri b_0 e b_1, i rapporti t di Student, t(b), e la probabilità P[t(b)] che t(b) risulti minore in

---

[28] Può essere interessante confrontare questi risultati con quelli ottenuti da Whaley (1982) per il mercato americano sulla base di un campione molto ampio composto da 15.582 opzioni quotate al Chicago Board Options Exchange (CBOE) su 91 titoli durante le 160 settimane dal 17/1/1975 al 3/2/1978. La deviazione percentuale media tra prezzo di mercato e prezzo teorico risulta pari al 2,15% utilizzando la formula standard di B-S ed all'1,08% utilizzando la formula proposta dallo stesso Whaley per tener conto della facoltà di risposta anticipata propria delle opzioni trattate al CBOE. La deviazione standard dell'errore percentuale risultava uguale a 25,24% nel primo caso e a 23,82% nel secondo.

[29] Gli importi dei premi sono stati standardizzati (rapportandoli al prezzo base) al fine di evitare problemi di eteroschedasticità nella regressione.

valore assoluto di una variabile casuale t di Student. Per ciascuna regressione viene inoltre riportato il coefficiente di determinazione R^2.

Tabella 5.4: Parametri delle rette di regressione[30]

Test	Dati	b_0	$t(b_0)$	$P[t(b_0)]$	b_1	$t(b_1)$	$P[t(b_1)]$	R^2
1. $P/K=b_0+b_1\hat{P}/K$	Titolo A	-0,002	-1,378	0,17	1,092	2,153	0,03	0,85
	Titolo B	-0,001	-0,910	0,37	1,032	1,111	0,27	0,92
	Titolo C	-0,008	-3,870	0,00	1,182	4,969	0,00	0,92
	Totale	-0,004	-4,351	0,00	1,117	5,801	0,00	0,91
2. $(P-\hat{P})/\hat{P}=b_0+b_1(S-K)/K$	Titolo A	0,038	1,236	0,22	0,970	1,032	0,30	0,00
	Titolo B	-0,001	-0,060	0,95	-0,352	-0,554	0,58	0,00
	Titolo C	0,012	0,383	0,70	0,796	1,186	0,24	0,00
	Totale	0,016	1,051	0,29	0,523	1,229	0,22	0,00
3. $(P-\hat{P})/\hat{P}=b_0+b_1(T*365)$	Titolo A	-0,050	-0,621	0,54	0,002	0,972	0,33	0,00
	Titolo B	-0,060	-1,183	0,24	0,002	1,316	0,19	0,01
	Titolo C	0,015	0,193	0,85	-0,000	-0,182	0,86	0,01
	Totale	-0,031	-0,766	0,44	0,000	1,087	0,28	0,00
4. $(P-\hat{P})/\hat{P}=b_0+b_1\sigma$	Titolo A	0,333	3,012	0,00	-0,920	-2,882	0,01	0,06
	Titolo B	0,050	0,767	0,44	-0,158	-0,767	0,45	0,00
	Titolo C	0,221	1,646	0,10	-0,520	-1,671	0,10	0,02
	Totale	0,151	2,931	0,00	-0,404	-2,852	0,01	0,02
5. $(P-\hat{P})/\hat{P}=b_0+b_1 l$	Titolo A	0,222	2,294	0,02	-0,007	-2,133	0,04	0,04
	Titolo B	0,128	1,954	0,05	-0,004	-2,001	0,05	0,04
	Titolo C	0,243	2,426	0,02	-0,008	-2,510	0,01	0,07
	Totale	0,196	3,869	0,00	-0,006	-3,828	0,00	0,05

I risultati del test 1 dimostrano che il modello di valutazione spiega oltre il 90% della varianza dei premi effettivi. Esso tende tuttavia a sopravvalutare i premi di

[30] Tutti i t-ratios sono costruiti per verificare l'ipotesi nulla che $b_1=0$ e $b_2=0$. Quelli del test 1 sono diretti a verificare l'ipotesi nulla che $b_0=0$ e $b_1=1$.

importo minore ed a sottovalutare i premi di importo maggiore ($b_0<0$ e $b_1>1$).[31]

Il test 2 esamina l'esistenza di una tendenza sistematica del modello a sopravvalutare o sottovalutare i contratti in the money (ossia con base inferiore al corso del titolo) e out of the money (con base superiore al corso del titolo). I risultati ottenuti dimostrano con sufficiente evidenza l'assenza di una simile relazione.

Le stesse conclusioni valgono anche per il test 3, diretto a verificare l'esistenza di una relazione sistematica tra lo scarto percentuale tra premio di mercato e premio teorico da un lato e la durata del contratto dall'altro. Anche in questo caso, i valori dei rapporti t permettono di sostenere la non significatività della relazione.

Significativa (quanto meno per il campione nel suo complesso) appare invece la relazione tra lo scarto percentuale tra premio di mercato e premio teorico da un lato e la stima della volatilità del titolo dall'altro. Il modello sottovaluta i premi sui titoli con minore volatilità e sopravvaluta i premi sui titoli con più alta volatilità.[32]

Una relazione significativa emerge anche dal test 5: il modello sottovaluta i premi nelle ultime fasi del mese borsistico (l basso) e li sopravvaluta nelle prime fasi (l elevato).

5.4. Test della efficienza del mercato

5.4.1. Metodologia

L'evidenza empirica del paragrafo precedente dimostra che il modello di valutazione fornisce valori teorici in media molto vicini a quelli effettivi. Tuttavia, l'esistenza di deviazioni talora significative può determinare l'opportunità di profitti da arbitraggio.

La derivazione della formula di valutazione è stata basata infatti sulla possibilità, per un operatore che non incorra in significativi oneri di transazione, di trarre profitto (senza rischio) da ogni deviazione tra premi di mercato e premi teorici.

Il processo di arbitraggio descritto nel paragrafo precedente comportava l'acquisto del premio sottovalutato (o la vendita del premio sopravvalutato) e la contemporanea ven-

---

[31] Lo stesso tipo di tendenza emerge dall'analisi di Whaley (1982) per il mercato americano.

[32] Anche questo risultato concorda con quanto documentato da diversi ricercatori per il mercato americano.

dita (acquisto) di $\alpha=N(x)$ azioni.[33] Se la formula determina correttamente il premio di equilibrio e la posizione è rivista continuamente in modo da mantenere costantemente il numero di azioni in portafoglio pari a $N(x)$, allora l'acquisto dei contratti sottovalutati e la vendita dei contratti sopravvalutati deve assicurare un guadagno significativamente maggiore di zero. D'altra parte, se il mercato è efficiente ed utilizza nella determinazione dei premi informazioni ulteriori rispetto a quelle incorporate nel modello, allora la strategia precedente non risulta conveniente.

Una verifica empirica dei rendimenti ottenibili attraverso la costruzione di simili posizioni di arbitraggio fornisce perciò un test dell'efficienza del mercato dei premi e della validità della formula come metodo di selezione dei contratti sopravvalutati o sottovalutati.

Per verificare empiricamente l'esistenza di opportunità di arbitraggio per il campione considerato si è proceduto nel modo seguente.

Il giorno in cui ha luogo la transazione a premio ($t=0$), si è determinato se il contratto risultava sopravvalutato ($P_D>\hat{P}_D$) o sottovalutato ($P_D<\hat{P}_D$) rispetto al modello. Nel primo caso il premio è considerato venduto, nel secondo acquistato. Contestualmente all'acquisto (vendita) del premio vengono altresì vendute (acquistate) $N(x_{j,t})$ azioni.

Poiché un riaggiustamento continuo del portafoglio non sarebbe possibile, la posizione è rivista giornalmente sulla base del nuovo valore di $N(x_{j,t})$: ogni giorno di borsa aperta, la precedente posizione a termine fermo viene liquidata ed è immediatamente ristabilita la nuova.

Indicando con $D_{j,t}$ il valore del j-esimo contratto a premio al tempo t (come calcolato sulla base della formula (4.4) e con $V_{j,t}=V_j(t-1,t)=(F_{j,t}-F_{j,t-1})e^{-r(T+\tau-t)}$ il valore corrente di un contratto a termine fermo sul titolo j stipulato al tempo $t-1$ per consegna al tempo $T+\tau$, per ciascun portafoglio il guadagno o la perdita nel giorno t ($1\leq t\leq T$) è definito da:

$$(5.1)\quad R_{j,t} = \pm\, [(D_{j,t}-D_{j,t-1})-N(x_{j,t-1})(V_{j,t}-V_{j,t-1})] =$$

$$= \pm\, [(D_{j,t}-D_{j,t-1})-N(x_{j,t-1})(F_{j,t}-F_{j,t-1})e^{-r(T+\tau-t)}],$$

giacché risulta V_{t-1} (il valore al tempo t-1 di un contratto a termine fermo iniziato al tempo t-1) uguale a zero.

---

[33] Si noti infatti che, quando $n\to\infty$, il numero α di azioni presenti nel portafoglio equivalente tende a $N(x)$, con $x=[\ln(F_t/K)+{}^1/_2\sigma^2(T-t)]/[\sigma\sqrt{(T-t)}]$. E' infatti dalla (4.3):

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = \lim_{n\to\infty} \{(D_u-D_d)/[(uF-dF)\cdot(1+\hat{r})^{-(n+\tau-1)}]\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \{[D(uF,T-t-h)-D(dF,T-t-h)]/(uF-dF)\}\cdot\lim_{n\to\infty} [e^{r(T-t)/n}]^{n+n\tau/(T-t)-1} =$$

$$= (\delta D/\delta F)e^{r(T+\tau-t)}= N(x).$$

Poiché si è usato il modello di valutazione per calcolare $D_{j,t}$ e $D_{j,t-1}$ nella 5.1, un aggiustamento è stato necessario per tener conto della differenza tra il prezzo iniziale $D_{j,0}$ risultante dal modello ed il prezzo di mercato del contratto, che è sempre nullo. Questa differenza è stata ripartita sull'intera vita del contratto calcolandone l'ammontare giornaliero equivalente; tale importo è stato sommato a ciascun rendimento $R_{j,t}$.[34]

I rendimenti realizzati su ogni singolo portafoglio sono stati aggregati in modo da calcolare il rendimento giornaliero del portafoglio complessivo. Tale rendimento è stato quindi diviso per il numero dei portafogli in essere nel giorno t al fine di generare la serie dei rendimenti giornalieri medi per contratto, R_{pt}.

5.4.2. Risultati

Il test è stato applicato ai dont del campione, supponendo di acquistare o vendere quelli per i quali lo scostamento percentuale tra premio di mercato e premio teorico risultava maggiore, in valore assoluto, del 15%.

La serie dei rendimenti giornalieri del portafoglio è stata calcolata per i 202 giorni di borsa aperta dal 21/7/1986 all'11/5/1987 (risposta premi di maggio), costituendo 55 posizioni sul titolo A, 49 sul titolo B e 44 sul titolo C.

Per verificare che i rendimenti del portafoglio fossero effettivamente privi di rischio sistematico (cioè non correlati con i rendimenti del portafoglio di mercato) è stata stimata la seguente regressione:

$$R_{Pt} = b_0 + b_1 R_{Mt} + u_t$$

dove R_{Mt} rappresenta la variazione giornaliera dell'indice generale COMIT al tempo t.[35]

Si è utilizzato b_0, l'intercetta stimata, come indice della redditività del portafoglio e b_1, il coefficiente di regressione di R_P su R_M, come indice del rischio sistematico di tale portafoglio.

---

[34] In alternativa, si sarebbe ovviamente potuto procedere definendo $R_{j,1} = \pm\ [D_{j,1} - N(x_{j,t-1})V_{j,1}]$ per t=1, in modo da tener conto che il prezzo di mercato del contratto è nullo, e continuando a calcolare $R_{j,t}$ secondo la 5.1 per t>1. Questo procedimento introduceva però perturbazioni eteroschedastiche nella serie dei rendimenti R_t, falsando le successive regressioni. Per questo si è preferito il sistema descritto nel testo, che risulta lo stesso adottato da Black e Scholes in sede di verifica della loro formula di valutazione: cfr. F. Black e M. Scholes (1972).

[35] Poiché i rendimenti derivanti dalle operazioni di arbitraggio sono misurati in termini assoluti anziché percentuali (dato che l'investimento iniziale è nullo), anche i rendimenti del portafoglio di mercato sono stati espressi in termini assoluti.

I risultati della regressione sono riportati nella tabella 5.5, separatamente per ciascun titolo e per il campione nel complesso. Poiché il rendimento medio giornaliero per contratto R_P è basato su un numero variabile di operazioni di arbitraggio, la stima della regressione potrebbe essere inficiata da un problema di eteroschedasticità.[36] La tabella 5.5 riporta pertanto anche i risultati della regressione effettuata sulla base dei minimi quadrati generalizzati, in cui tutte le variabili sono state ponderate per la radice quadrata del numero di operazioni di arbitraggio in essere al tempo t.

Tabella 5.5: Risultati delle regressioni

Test	Dati	b_0	$t(b_0)$	$P[t(b_0)]$	b_1	$t(b_1)$	$P[t(b_1)]$	R^2
1. $R = b_0 + b_1 R$	Titolo A	5,629	7,682	0,00	-0,087	-0,889	0,37	0,00
	Titolo B	34,414	5,551	0,00	-0,988	-1,177	0,24	0,01
(Minimi quadrati	Titolo C	1,037	6,369	0,00	-0,027	-1,215	0,23	0,01
ordinari)	Totale	14,274	6,414	0,00	-0,403	-1,356	0,18	0,01
2. $R = b_0 + b_1 R$	Titolo A	4,835	7,304	0,00	-0,144	-1,558	0,12	0,25
	Titolo B	41,519	6,289	0,00	-1,066	-1,305	0,19	0,17
(Minimi quadrati	Titolo C	1,089	6,241	0,00	-0,040	-1,818	0,07	0,17
Titolo Bzzati)	Totale	14,702	6,526	0,00	-0,448	-1,528	0,13	0,18

In tutte le 8 rette di regressione stimate, l'intercetta b_0 risulta sempre significativa (al livello del 5%), contrariamente al coefficiente b_1.

I risultati della tabella 5.5 implicano che la strategia descritta avrebbe assicurato un guadagno giornaliero per azione trattata a premio pari a circa L.5 operando sul titolo A, a L.41 operando sul titolo B ed a L.1 operando sul titolo C. Considerando che la durata media dei contratti nel campione è di 32,5 giorni, questo equivale ad un guadagno medio di L.162 per azione acquistata a premio operando sul titolo A, di L.1.332 operando sul titolo B e di L.32 operando sul titolo C.

[36] Si assuma infatti che per ciascuna operazione di arbitraggio valga la relazione $R_{j,t} = b_0 + b_1 R_{M,t} + u_{j,t}$, dove i residui $u_{j,t}$ sono tutti ugualmente distribuiti con media 0 e varianza σ^2. Chiamato m_t il numero di operazioni in essere al tempo t, risulta:

$$R_{P,t} = \Sigma R_{j,t}/m_t = b_0 + b_1 R_{M,t} + \Sigma u_j/m_t,$$

con varianza dei residui pari a: $var(\Sigma u_{j,t}/m_t) = m_t \sigma^2/m_t^2 = \sigma^2/m_t$, e quindi non costante.

Questi risultati forniscono un notevole supporto alla validità della formula di valutazione come strumento di discriminazione tra contratti sopravvalutati e sottovalutati.

5.5. Conclusioni

Sulla base dei risultati ottenuti in questo paragrafo non è possibile respingere l'ipotesi nulla di un mercato dei premi efficiente.

I valori di mercato dei premi dont sono in media molto vicini ai loro valori di equilibrio. La deviazione percentuale media tra premi di mercato e premi teorici risulta inferiore all'1% e non significativamente diversa da zero. Lo scostamento quadratico medio di tale deviazione, pari a 25,8%, risulta appena superiore a quella rilevata, sulla base di una identica metodologia, per il mercato americano delle options[37].

Anche i risultati ottenuti nel paragrafo 5.4, che provano la validità della formula nell'individuare i contratti sopravvalutati o sottovalutati, non sembrano sufficienti a respingere l'ipotesi di efficienza del mercato dei premi. I profitti medi giornalieri ottenuti sulla base della precedente strategia sono infatti pari a circa lo 0,30-0,35 per mille del valore medio dei titoli, e generalmente gli oneri di transazione richiesti dall'aggiustamento quotidiano del portafoglio sono tali da eliminare questo profitto di arbitraggio. Inoltre, i limiti dell'informativa disponibile e l'uso di valori medi dei premi nelle precedenti analisi possono aver portato talvolta ad individuare opportunità di arbitraggio risultanti dalla non simultaneità tra i valori registrati dei premi e le quotazioni di listino dei titoli.

In conclusione, dunque, sulla base della verifica empirica svolta, l'ipotesi di un mercato dei premi efficiente non sembra poter essere respinta. Occorre comunque ricordare che i tre titoli presi a riferimento per le precedenti analisi sono quelli che accentrano di gran lunga il maggior volume delle contrattazioni a premio alla Borsa di Milano. Resta da verificare se le precedenti conclusioni possano essere estese ai titoli con minore mercato.

---

[37] Cfr. Whaley (1982).

APPENDICE

A.1. Convergenza della formula binomiale nel continuo

Si consideri la formula binomiale (4.2):

$$D(F,K,n,P_D) = \{\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\max[0,(u^jd^{n-j}F-K)]-P_D\}/(1+\rho)^{(n+\tau)}$$

Sia a il più piccolo intero non negativo per il quale risulta $u^a d^{n-a}F>K$.[38] Per ogni $j<a$ risulta allora $\max[0,(u^jd^{n-j}F-K)]=0$, mentre per ogni $j\geq a$ è $\max[0,(u^jd^{n-j}F-K)]=u^jd^{n-j}F-K$. Pertanto:

$$D(F,K,n,P_D) = \{\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(u^jd^{n-j}F-K)-P_D\}/(1+\rho)^{(n+\tau)}$$

Ovviamente, se alla scadenza risulta $a>n$ non sarà mai conveniente esercitare il dont, ed il valore della sommatoria sarà nullo.

Spezzando l'espressione precedente in due termini, si può riscrivere:

$$D(F,K,n,P_D) = \{F[\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}u^jd^{n-j}]$$
$$- \{K[\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}]-P_D\}/(1+\rho)^{(n+\tau)}.$$

La seconda espressione tra parentesi quadre è la complementare della funzione di ripartizione binomiale, che può essere indicata con $\Phi[a;n,p]$.[39] La prima espressione tra parentesi quadre può a sua volta essere interpretata come la complementare della funzione di ripartizione binomiale $\Phi[a;n,p']$, con $p'=up$.[40]

La formula di valutazione può pertanto essere riscritta come segue:

(A.1)

$$\boxed{D(F,K,n,P_D) = \{F\Phi[a;n,p']-K\Phi[a;n,p]-P_D\}/(1+\rho)^{(n+\tau)}}$$

---

[38] Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri della precedente disuguagliaza, possiamo scrivere: $a=\ln[K/(Fd^n)]/\ln(u/d)+\varepsilon$, con $0<\varepsilon<1$ ed $(a+\varepsilon)\in N$ (dove N rappresenta l'insieme dei numeri naturali).

[39] $\Phi[a;n,p]$ è la probabilità che la somma di n variabili casuali di Bernoulli, ciascuna delle quali può assumere il valore 1 con probabilità p o 0 con probabilità 1-p, sia maggiore od uguale ad a.

[40] Si noti che $p'=up=u(1-d)/(u-d)$ può essere interpretata come una probabilità, in quanto $u>1>d \Rightarrow 0<u(1-d)/(u-d)<1$. Risulta inoltre $1-p'=d(u-1)/(u-d)=d(1-p)$.

Per valutare come si modifica questa formula quando le contrattazioni hanno luogo sempre più frequentemente e n tende ad infinito, occorre anzitutto esprimere in funzione di n le variabili $\hat{r}$, $\hat{\tau}$, u, d e q, dipendenti dall'ampiezza dell'intervallo temporale considerato.

Per quanto riguarda il tasso d'interesse $\hat{r}$, si ricordi che esso si riferisce ad un periodo di lunghezza $h=(T-t)/n$. Pertanto, nell'ipotesi che il rendimento nel periodo $(T-t)$ rimanga invariato, si ha:

$$(1+\hat{r})^n=e^{r(T-t)},$$

da cui $(1+\hat{r})=e^{r(T-t)/n}$.

Per quanto riguarda $\hat{\tau}$, che rappresenta il numero di periodi (di ampiezza h) intercorrenti tra la risposta premi e la data di liquidazione, si ha: $\hat{\tau}=\tau/h=n\tau/(T-t)$.

Al fine di specificare la dipendenza da n di u, d e q, occorre ricordare che il prezzo alla scadenza del titolo contrattato a premio, F_T, è una variabile casuale definita da:

$$F_T=u^j d^{n-j} F$$

dove j è il numero (casuale) di periodi in cui il prezzo dell'azione sale durante gli n periodi restanti alla scadenza.

Prendendo i logaritmi di entrambi i membri, si ottiene:

$$\ln(F_T/F)=j\ln(u)+(n-j)\ln(d)=j\ln(u/d)+n\ln(d).$$

Risulta dunque:

$$E[\ln(F_T/F)]=E[j]\ln(u/d)+n\ln(d)$$

e:

$$Var[\ln(F_T/F)]=Var[j]\ln^2(u/d).$$

In ogni singolo periodo può essere $j=1$ (con probabilità q) o $j=0$ (con probabilità $1-q$), cosicché per n periodi risulta:

$$E[j]=n\cdot[1\cdot q+0\cdot(1-q)]=nq$$

$$Var[j]=n\cdot[(1-q)^2q+(0-q)^2(1-q)]=nq(1-q).$$

Si ha pertanto:

$$E[\ln(F_T/F)]=[q\ln(u/d)+\ln(d)]n=\hat{\mu}n$$

e:

$$Var[\ln(F_T/F)]=q(1-q)\ln^2(u/d)n=\hat{\sigma}^2n.$$

Se $\mu(T-t)$ e $\sigma^2(T-t)$ sono i parametri della corrispondente distribuzione nel continuo, allora, scegliendo u, d e q in modo tale che, al tendere di n ad infinito, $\hat{\mu}n$ tenda a $\mu(T-t)$ e $\hat{\sigma}^2 n$ tenda a $\sigma^2(T-t)$, ossia ponendo:

$u=e^{\sigma\sqrt{[(T-t)/n]}}$, $d=e^{-\sigma\sqrt{[(T-t)/n]}}$, e $q={}^1/_2+{}^1/_2(\mu/\sigma)\sqrt{[(T-t)/n]}$,

è possibile dimostrare (facendo ricorso al teorema del limite centrale) che, quando $n\to\infty$, la distribuzione moltiplicativa binomiale del prezzo F_T tende alla distribuzione lognormale.[41] In tal caso inoltre:

$$\Phi[a;n,p']\to N(x) \text{ e } \Phi[a;n,p]\to N[x-\sigma\sqrt{(T-t)}] \text{ per } n\to\infty$$

con $x=[\ln(F/K)+{}^1/_2\sigma^2(T-t)]/[\sigma\sqrt{(T-t)}]$. Pertanto la formula di valutazione binomiale (A.1) converge alla seguente formula di valutazione nel continuo:[42]

(A.2)

$$D(F_t,K,T-t,P_D)=e^{-r(T+\tau-t)}\{F_t\cdot N(x)-K\cdot N[x-\sigma\sqrt{(T-t)}]-P_D\}$$

$$x=[\ln(F_t/K)+{}^1/_2\sigma^2(T-t)]/[\sigma\sqrt{(T-t)}].$$

A.2. Caratteristiche del processo stocastico del prezzo S

Nel derivare la formula di valutazione nel continuo (A.2) si è fatta l'ipotesi che il prezzo _a termine_ F segua un moto geometrico browniano:

(A.3) $$dF/F = \mu dt + \sigma dz.$$

Questa ipotesi risulta nettamente preferibile a quella che sia il prezzo per fine corrente S a seguire un processo continuo di tipo browniano. Durante la vita del contratto a premio (nell'ipotesi frequente che questo sia stipulato per una liquidazione successiva a quella corrente) il prezzo S risulta riferito ad una scadenza che si avvicina con l'avvicinarsi del giorno dei riporti, per poi aumentare bruscamente con l'inizio del nuovo mese borsistico e quindi ridursi nuovamente. Questa circostanza rende probabile il verificarsi di "salti" del prezzo del titolo in corrispondenza dell'inizio del nuovo mese borsistico, e quindi inadeguata l'i-

---

[41] Questo equivale ad assumere che nel continuo il prezzo a termine F segue un moto geometrico browniano del tipo $F=\mu dt+\sigma dz$, dove dz è una variabile casuale normalmente distribuita con media nulla e varianza dt.

[42] La formula A.2 risulta del tutto analoga a quella derivata da F. Black per la valutazione di una _call option_ su un _future_, come era prevedibile data la natura dei nostri contratti a premio.

potesi di un processo continuo.[43] L'ipotesi (A.3) implica esattamente questo tipo di comportamento per il prezzo S.

D'altra parte, si osservi che all'interno del ciclo borsistico vale l'ipotesi di moto geometrico browniano per il prezzo S. Infatti, applicando il lemma di Ito[44] alla relazione

$$S=Fe^{-r'\delta}$$

si ottiene (essendo costante δ):

$$\begin{aligned} dS &= S_F dF + (S_t+{}^1/_2 F^2\sigma^2 S_{FF})dt = \\ &= e^{-r'\delta}(\mu F dt+\sigma F dz) = \\ &= \mu S dt + \sigma S dz. \end{aligned}$$

All'interno di un ciclo borsistico, il prezzo di borsa per fine corrente del titolo risulta dunque seguire un processo caratterizzato dagli stessi parametri del prezzo F. Questo risulta importante per il calcolo della volatilità σ, che compare come input nella formula di valutazione. Il risultato ottenuto ci assicura che possiamo stimare la volatilità del prezzo F sulla base dei prezzi di borsa S all'interno di uno stesso ciclo borsistico, anziché generando artificialmente, attraverso le relazioni precedenti, la serie storica dei prezzi F a partire dai prezzi effettivi S.

[43] Per una verifica empirica dell'esistenza di questi "salti" in corrispondenza dell'inizio del nuovo mese borsistico si veda: Banca d'Italia (1987).

[44] Il lemma di Ito fornisce una regola per la differenziazione delle funzioni di variabili stocastiche la cui evoluzione nel tempo è descritta da un processo continuo del tipo $dF=m(F,t)dt+s(F,t)dz$ (c.d. processo di Ito), dove F, m e s sono vettori n-dimensionali e dz è un processo di Wiener a n dimensioni. Nel caso in cui G sia una funzione non stocastica di una sola variabile stocastica F, il lemma di Ito può essere enunciato come segue:

$dG(F,t) = G_F dF+[G_t+½s^2(F,t)G_{FF}]dt$,
dove G_F e G_t sono le derivate prime di G rispetto a F e a t e G_{FF} è la derivata seconda rispetto a F.

BIBLIOGRAFIA

BANCA D'ITALIA (1987), Ciclo di borsa e contratti di riporto, "Bollettino Economico" n. 8, pp. 1•-7•.

BLACK, F. (1976), The Pricing of Commodity Contracts, "Journal of Financial Economics" n. 3, pp. 167-179.

BLACK, F. - SCHOLES, M. (1972), The valuation of option contracts and a test of market efficiency, "Journal of Finance" n. 27, pp. 399-417.

BLACK, F. - SCHOLES, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, "Journal of Political Economy" n. 81, pp. 637-659.

CHIRAS, D. - MANASTER, S. (1978), The informational content of option prices and a test of market efficiency, "Journal of Financial Economics" n. 6, pp. 213-234.

COX, J. - ROSS, S. - RUBINSTEIN, M. (1979), Option Pricing: a simplified approach, "Journal of Financial Economics" n. 7, pp. 229-263.

FISCHER, S. (1978), Call Option Pricing when the Exercise Price is Uncertain, and the Valuation of Index Bonds, "Journal of Finance" n. 1, pp. 169-176.

LATANE', H. - RENDLEMAN, R. (1976), Standard deviation of stock price ratios implied by option premia, "Journal of Finance" n. 31, pp. 369-382.

MERTON, R. (1973), Theory of Rational Option Pricing, "Bell Journal of Economics and Management Science" n. 4, pp. 141-183.

PIANCA, P. (1984), Modelli per la valutazione di un'opzione: alcune applicazioni al mercato mobiliare italiano, "Il Risparmio" n. 1, pp. 189-209.

TEDESCHI, A. - VERGA, G. (1983), I contratti a premio: aspetti teorici e risultati empirici per la Borsa italiana, Rivista Internazionale di Scienze Sociali n. 1, pp. 63-89.

WHALEY, R. (1982), Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks. Empirical Tests, "Journal of Financial Economics" n. 10, pp. 29-58.

ELENCO DEI PIÙ RECENTI TEMI DI DISCUSSIONE (*)

n. 91 — *La disoccupazione in Italia: un'analisi con il modello econometrico della Banca d'Italia,* di G. BODO - I. VISCO (luglio 1987).

n. 92 — *L'Italia e il sistema monetario internazionale dagli anni '60 agli anni '90 del secolo scorso,* di M. ROCCAS (agosto 1987).

n. 93 — *Reddito e disoccupazione negli Stati Uniti e in Europa: 1979-1985,* di J. C. MARTINEZ OLIVA (agosto 1987).

n. 94 — *La tassazione e i mercati finanziari,* di G. ANCIDONI - B. BIANCHI - V. CERIANI - P. CORAGGIO - A. DI MAJO - R. MARCELLI - N. PIETRAFESA (agosto 1987).

n. 95 — *Una applicazione del filtro di Kalman per la previsione dei depositi bancari,* di A. CIVIDINI - C. COTTARELLI (ottobre 1987).

n. 96 — *Macroeconomic Policy Coordination of Interdependent Economies: the Game-Theory Approach in a Static Framework,* di J. C. MARTINEZ OLIVA (ottobre 1987).

n. 97 — *Occupazione e disoccupazione: tendenze di fondo e variazioni di breve periodo,* di P. SYLOS LABINI (novembre 1987).

n. 98 — *Capital controls and bank regulation,* di G. GENNOTTE - D. PYLE (dicembre 1987).

n. 99 — *Funzioni di costo e obiettivi di efficienza nella produzione bancaria,* di G. LANCIOTTI - T. RAGANELLI (febbraio 1988).

n. 100 — *L'imputazione di informazioni mancanti: una sperimentazione,* di L. CANNARI (marzo 1988).

n. 101 — *Esiste una curva di Beveridge per l'Italia? Analisi empiriche della relazione tra disoccupazione e posti di lavoro vacanti (1980-1985),* di P. SESTITO (marzo 1988).

n. 102 — *Alcune considerazioni sugli effetti di capitalizzazione determinati dalla tassazione dei titoli di Stato,* di D. FRANCO - N. SARTOR (luglio 1988).

n. 103 — *La coesione dello SME e il ruolo dei fattori esterni: un'analisi in termini di commercio estero,* di L. BINI SMAGHI - S. VONA (luglio 1988).

n. 104 — *Stime in tempo reale della produzione industriale,* di G. BODO - A. CIVIDINI - L. F. SIGNORINI (luglio 1988).

n. 105 — *On the difference between tax and spending policies in models with finite horizons,* di W. H. BRANSON - G. GALLI (ottobre 1988).

n. 106 — *Non nested testing procedures: Monte Carlo evidence and post simulation analysis in dynamic models,* di G. PARIGI (ottobre 1988).

n. 107 — *Completamento del mercato unico. Conseguenze reali e monetarie,* di A. FAZIO (ottobre 1988).

n. 108 — *Modello mensile del mercato monetario,* (ottobre 1988).

n. 109 — *Il mercato unico europeo e l'armonizzazione dell'IVA e delle accise,* di C. A. BOLLINO - V. CERIANI - R. VIOLI (dicembre 1988).

(*) I «Temi» possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.

BANCA D'ITALIA - CENTRO STAMPA