Settembre 1984

36

Servizio Studi
della
Banca d'Italia

TEMI DI DISCUSSIONE

Giampaolo GALLI

Corsi e rendimenti dei titoli a medio e lungo termine

CORSI E RENDIMENTI DEI TITOLI A MEDIO E LUNGO TERMINE

di

Giampaolo Galli

Le variazioni dei prezzi delle attività finanziarie a medio e lungo termine acquistano particolare rilevanza in periodi di elevata variabilità dei tassi d'interesse, contribuendo a determinare le decisioni circa l'ammontare e l'allocazione del risparmio sia attraverso gli effetti ricchezza sia influenzando le aspettative circa l'evoluzione dei rendimenti attesi per periodi di detenzione inferiori alla scadenza. Questa nota propone una metodologia econometrica per endogenizzare i corsi medi delle obbligazioni detenute dall'operatore pubblico dei conti finanziari della Banca d'Italia. I principali problemi che vengono affrontati riguardano l'aggregazione di funzioni non lineari e la validità dell'approssimazione della vita matematica di un titolo a rata costante di capitale e interessi con la vita media. Le equazioni stimate vengono utilizzate per quantificare le perdite e i guadagni in conto capitale fatti registrare nel periodo fra il 1976 ed il 1982.

CORSI E RENDIMENTI DEI TITOLI A MEDIO E LUNGO TERMINE

1 - Introduzione

L'evoluzione nel tempo del valore delle attività finanziarie è determinata da un lato dai flussi di risparmio e indebitamento nel periodo e dall'altro dalle variazioni dei prezzi degli stocks in essere. Queste ultime acquistano particolare rilevanza in periodi di elevata variabilità dei tassi di interesse, contribuendo a determinare le decisioni circa l'ammontare e l'allocazione del risparmio sia attraverso gli effetti ricchezza sia influenzando le aspettative circa l'evoluzione dei rendimenti attesi per periodi di detenzione inferiori alla scadenza. La Tav. 1 pone a confronto i tassi di interesse (rendimenti alla scadenza) e i rendimenti su una lira di rendita nell'ipotesi di un periodo di detenzione pari all'anno. Nel periodo considerato (6001-8203) le due serie differiscono in media (10 per cento per la prima e 3 per cento per la seconda) e soprattutto in varianza. Soltanto nel periodo dal '65 al '68, i rendimenti per periodi di detenzione risultano relativamente stabili: in tutti gli altri periodi essi subiscono oscillazioni che vanno da un massimo di + 34 per cento nell'8202 ad un minimo di - 55 per cento nel 7304.

Le oscillazioni dei corsi si applicano ad uno stock di titoli a medio e lungo termine a tasso fisso che è cresciuto di circa sei volte nel corso degli anni '70 ed era pari al 27 per cento circa del prodotto interno lordo alla fine del 1982. Le emissioni nette sono passate dal 4 per cento del PIL nella media degli anni '60 all'8 per cento negli anni '70 ([1]).

Nonostante il fatto che, come noto, negli ultimi anni, in parte proprio in conseguenza delle notevoli perdite subite nel passato, le preferenze del pubblico si siano indirizzate verso i titoli ad indicizzazione finanziaria, un'analisi dell'andamento dei corsi obbligazionari rimane rilevante sia perchè i titoli a tasso fisso sono a tutt'oggi la quota preponderante delle consistenze dei titoli a medio e lungo termine (più del 75% al dicembre '82) sia perchè tale quota potrebbe aumentare in relazione alla riduzione del tasso di inflazione sia, infine, perchè il loro andamento può fornire una spiegazione di alcuni importanti fenomeni verificatisi nel periodo di stima del modello econometrico. La stessa riflessione circa l'opportunità di introdurre titoli ad indicizzazione reale o di espandere l'area dell'indicizzazione finanziaria può trarre spunti da un'indagine retrospettiva del mercato obbligazionario a tasso fisso.

Per questi motivi, nella costruzione di un modello econometrico del settore finanziario, è sembrato opportuno discostarsi dalla via più tradizionale di trattare le attività finanziarie al loro valore facciale.

Scopo di questa nota è di analizzare i problemi che si pongono per endogenizzare il corso medio secco delle obbligazioni non indicizzate a medio e lungo termine con particolare riferimento a quelle detenute dall'operatore "pubblico" dei conti finanziari della Banca d'Italia (cfr. tav. 2). Tale operatore, come noto, comprende oltre all'economia (famiglie e imprese) anche le compagnie di assicurazione, gli istituti di previdenza e gli enti territoriali. Inoltre, essendo il dato delle detenzioni del pubblico ottenuto a saldo, una piccola quota dei titoli attribuiti a questo operatore è in realtà detenuta da non residenti.

A differenza di quanto accade normalmente in econometria, in questo caso la struttura del modello è nota con esattezza. La Banca d'Italia rileva i corsi, la scadenza, il tasso nominale e le altre caratteristiche dei titoli (piano di ammortamento, trattamento fiscale, premi, estrazioni ecc.) e calcola con procedura automatica i rendimenti netti , lordi ed all'ultimo rimborso (cfr. R. Veccia e L. Capomassi, Bollettino della Banca d'Italia, lug.- sett. 1977).

Il compito dell'econometrico consiste, dunque, soltanto nel riprodurre tale calcolo per l'aggregato, ossia utilizzando dati medi per la variabile dipendente e per le variabili esplicative. Le uniche funzioni di comportamento, contenenti parametri non noti, riguardano la determinazione della cedola e della scadenza sui titoli di nuova emissione. Non si è però ritenuto utile stimare direttamente tali relazioni perchè in realtà ciò che interessa è la cedola e la scadenza <u>medie</u> le quali dipendono essenzialmente dalla struttura per età e vita residua dei titoli in essere in ogni periodo. Tale struttura è estremamente variabile nel tempo, il che rende poco utile una stima econometrica che necessariamente richiederebbe una struttura di ritardi a pesi fissi o al più variabili secondo una legge relativamente rigida; essa è peraltro nota esattamente e di facile proiezione nel futuro quando il modello venga utilizzato a fini di previsione. Alternativamente, quando non si ritenga di particolare importanza prevedere con precisione l'andamento della cedola e della vita media, si può utilizzare una semplice equazione di raccordo (vedi paragrafo 5) nella quale il corso è messo direttamente in relazione con un ritardo distribuito dei rendimenti passati; a tale equazione, che è certamente mispecificata (a causa dell'ipotesi di pesi fissi), si richiede sostanzialmente una buona capacità previsiva e valori ragionevoli dei parametri.

I problemi che si pongono in sede di stima riguardano essenzialmente l'aggregazione: si tratta da un lato di trovare un modo per trattare in maniera omogenea titoli con piani di ammortamento molto diversi e dall'altra di risolvere il problema econometrico dell'aggregazione di funzioni non lineari. La prima questione viene discussa nel paragrafo 2 e nell'Appendice; la seconda è trattata nel paragrafo 3. Nel paragrafo 5, le equazioni stimate vengono utilizzate per quantificare le perdite in conto capitale subite dagli operatori nel periodo fra il 1976 ed il 1982.

Nel paragrafo 5 vengono presentate stime di una forma semiridotta che consente di mettere in relazione direttamente il corso medio con un ritardo distribuito dei rendimenti, senza fare uso dei dati sulla cedola e la vita residua.

2 - Diversità dei piani di ammortamento

La formula che esprime il corso in funzione del tasso nominale e del rendimento è notevolmente diversa a seconda che il titolo preveda il rimborso alla scadenza oppure quote di ammortamento progressive (cfr. ad esempio L. Rosania: "Ammortamento di obbligazioni...", Bancaria, luglio 1980).

Poichè l'analisi econometrica è riferita all'aggregato dei titoli a tasso fisso, si pone il problema di come approssimare con un'unica formula la funzione del corso per titoli che hanno piani di ammortamento diversi. La soluzione adottata in questo lavoro consiste nel trasformare un titolo con ammortamento progressivo in un titolo con rimborso alla scadenza, facendo uso dei dati pubblicati sulla vita media. Tale soluzione è approssimata per il fatto che l'equivalenza esatta fra i due tipi di titoli richiede che si utilizzi non la vita media, bensì la vita matematica: quest'ultima è la scadenza di un titolo con rimborso unico che abbia lo stesso corso, rendimento e tasso nominale di un titolo ad ammortamento progressivo con una determinata durata (ossia scadenza dell'ultimo rimborso) ([2]).

Tale approssimazione sembra accettabile alla luce dei dati riportati nella tav. 3, che mostrano che, per titoli ad ammortamento francese (ossia a rate costanti di capitale ed interessi) e per rendimenti prossimi al tasso nominale, la vita media supera la vita matematica in generale di pochi mesi, la differenza essendo una funzione crescente del tasso d'interesse e della scadenza. Con il rendimento al 10% e una scadenza decennale l'errore che si commette considerando la vita media anzichè la vita matematica è inferiore a 5 mesi ([3]).

Utilizzando questa approssimazione, si può scrivere la seguente formula valida per i due tipi di titoli, con l'avvertenza però che N non è la scadenza bensì la vita media:

$$p = \sum_{t=1}^{N} \frac{c}{(1+r)^t} + \frac{1}{(1+r)^N} = \frac{c}{r}(1-(1+r)^{-N})+(1+r)^{-N} \tag{2.1}$$

dove p = corso
c = tasso nominale
r = rendimento effettivo

Si noti che la sommatoria inizia in t=1 (rendita posticipata); ciò è dovuto al fatto che tale formula è una migliore approssimazione del corso secco, che è la variabile cui si riferiscono le stime ([4]).

3 - Aggregazione di funzioni non lineari

Il corso di un titolo è una funzione non lineare della cedola, del rendimento e della scadenza. Per la diseguaglianza di Jensen, non può essere vero che la media dei corsi sia la stessa funzione dei valori medi di queste variabili. Dunque il solo processo di aggregazione introduce nella funzione del corso medio un termine di errore che non è presente nelle singole relazioni microeconomiche. Per analizzare le implicazioni di ciò per la stima econometrica, si considerino le seguenti espressioni:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{\infty} w_i p_i \tag{3.1}$$

$$p_i = \frac{c_i}{r_i} \left(1-(1+r)^{-N_i}\right) + (1+r_i)^{-N_i} \tag{3.2}$$

dove
$\bar{p}$ = corso medio
p_i = corso del titolo i-esimo
w_i = peso " " "
c_i = cedola " " "
N_i = scadenza " "
r_i = rendimento " "

Espandendo la parte di destra della (3.1) in serie di Taylor attorno ai valori medi, in un determinato periodo, della cedola (c), del rendimento (r) e della scadenza (N) si ha:

(3.3) $\bar{p} = \tilde{p} + u$

dove

(3.4) $\tilde{p} = p_i |_{\bar{c},\bar{r},\bar{N}}$

(3.5) $u = \frac{1}{2} \sum_x \sum_y p_{xy} \sigma_{xy} + \phi \qquad x,y = r,c,N$

(3.6) $\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} w_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

(3.7) $p_{xy} = \frac{\delta^2 \bar{p}}{\delta x \delta y} |_{\bar{c},\bar{r},\bar{N}}$

ϕ = termini di ordine superiore al secondo.

Si noti che i termini di ordine superiore al primo (contenuti in u) sono funzione dei valori medi della distribuzione (contenuti in p_{xy}) e della matrice di covarianza (σ_{xy}).

Di conseguenza anche qualora la matrice di covarianza sia costante nel tempo, u sarà correlato con $\tilde{p}$, dando luogo a inconsistenza delle stime, in una regressione di $\bar{p}$ su $\tilde{p}$ soltanto. Inoltre è possibile che la stessa matrice di covarianza sia correlata con i valori medi. Si consideri, ad esempio, la covarianza fra rendimento e scadenza. Essa può essere vista come una descrizione sintetica della struttura a termine dei tassi di interesse: nell'esperienza italiana in generale essa è stata positivamente inclinata quando i tassi sono stati bassi e viceversa.

Le altre due covarianze dipendono dalla relazione fra rendimenti e cedola (se il pubblico preferisce cedole alte, essa sarà negativa) e fra cedole e scadenza.

Anche qualora non vi sia distorsione delle stime, esse saranno inefficienti dal momento che u è certamente correlato nel tempo.

La tavola 4. consente di valutare l'entità della distorsione. Nell' equazione 2, con riferimento al totale dei titoli detenuti dal pubblico, il corso medio ($\bar{p}$) è regredito su una costante e sul termine di prim'ordine (β) dell'espansione in serie di Taylor (3.3); la cedola, il rendimento e la vita media sono calcolate utilizzando gli stessi pesi della variabile dipendente . La costante che non compare nelle relazioni microeconomiche risulta significativamente diversa da zero ed il coefficiente di β è leggermente sottostimato rispetto all'unità; il problema è meno grave nel caso dell'equazione 4, che si riferisce ai soli titoli di Stato, verosimilmente a causa della minore dispersione delle caratteristiche di questi titoli. Sulla sottostima del coefficiente della 2 (ma non della 4) pesano anche l'"error in variables" dovuto all'approssimazione utilizzata della vita matematica e alla mancata considerazione di alcune caratteristiche dei titoli quali le modalità delle estrazioni e del pagamento delle cedole (che influiscono sul profilo del corso secco in corso d'anno), i premi ed il trattamento fiscale ([5]). Nelle ultime due righe della tavola sono riportati i valori medi dei coefficienti e degli indicatori statistici ottenuti ripetendo 30 volte due diversi esperimenti Montecarlo, in cui la distribuzione dei dati è stata generata sulla base di distribuzioni uniformi con media e varianza crescenti nel tempo (cfr. nota alla tavola).

Complessivamente, il messaggio è che l'aggregazione produce una distorsione delle stime, che non è però devastante, ossia tale da rendere inattendibile un'analisi degli effetti di variazioni delle variabili esplicative (ad es. i rendimenti) sul corso medio.

Fondamentalmente l'aggregazione si manifesta in residui considerevolmente diversi da zero (cfr. lo standard error di .015 nell'equazione 2) e fortemente autocorrelati (Durbin - Watson = .36). In generale, ossia quando non si conoscano le vere relazioni microeconomiche, questo è un problema serio per il fatto che il ricercatore non è più in grado di interpretare i tests diagnostici: un'elevata autocorrelazione di residui può indicare un'insufficienza, come generalmente si ritiene, della teoria microeconomica sottostante (variabili omesse, ecc.), ma può essere semplicemente la conseguenza dell'aggregazione.

Come procedere per ovviare al problema? In linea di principio, la soluzione corretta consiste nell'introdurre i termini del second'ordine, calcolando la matrice hessiana e la matrice di covarianza del campione. Questa procedura dà luogo a due inconvenienti. Innanzitutto è molto probabile che la matrice dei regressori risulti quasi singolare; in secondo luogo tale matrice può essere notevolmente onerosa da calcolare e di difficile previsione, qualora l'equazione debba essere utilizzata a fini previsivi o di simulazioni di scenari alternativi e non di semplice verifica di ipotesi. Qualora però i termini del second'ordine contengano variabili economicamente interessanti (si pensi ad esempio alla varianza dei redditi individuali in una funzione logaritmica del consumo), questa sembra senz'altro la via da seguire.

Nelle equazioni 3 e 6, è stato fatto un tentativo per tenere conto dei termini di second'ordine, calcolando analiticamente la matrice hessiana (p_{xy}) ma non la matrice di covarianza del campione; si sono invece ipotizzati costanti i rapporti fra la media e la varianza di ciascuna variabile ed i coefficienti di correlazione fra di esse, ponendo nella 3.6

$$\sigma_{xy}(t)=a_x\bar{x}(t) \qquad \text{se } x = y$$

$$\sigma_{xy}(t) = \gamma_{xy}\, a_x a_y \bar{x}(t)\bar{y}(t) \qquad \text{se } x \neq y$$

dove a e γ sono parametri. Questi tentativi non hanno consentito di ottenere migliori stime del coefficiente di $\tilde{p}$, a causa della quasi singolarità della matrice dei regressori. Per ottenere comunque una valutazione dell'effetto dei termini del second'ordine, si è vincolato all'unità il coefficiente di $\tilde{p}$: le equazioni 3 e 6 vanno dunque confrontate con la 1 e la

3. In ambedue i casi l'autocorrelazione dei residui diminuisce notevolmente e viene eliminata nel caso dei titoli di Stato. Risulta inoltre confermata la minor dispersione di questi titoli rispetto al totale. Lo scarto quadratico medio dei rendimenti del totale dei titoli è stimato in circa 2 punti (quando i tassi erano al 10%) e quello delle scadenze in circa 7 anni. La covarianza fra rendimento e cedola risulta positiva, coerentemente con considerazioni di ordine fiscale, ma contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare in base alla considerazione della maggior volatilità dei rendimenti dei titoli a cedola bassa, legata all'alea delle estrazioni. (cfr. B. Bianchi e P. Nardi: "La volatilità dei rendimenti dei prestiti obbligazionari" in Contributi alla Ricerca Economica, Banca d'Italia, dic.1972). La struttura per scadenze sembra essere piatta; in realtà probabilmente essa è variata nel corso del periodo di stima.

Questi risultati sono, ovviamente, soltanto indicativi a causa principalmente delle ipotesi fatte sulla matrice di covarianza. Le equazioni così stimate sono comunque migliori di quelle che trascurano completamente i termini di second'ordine, come confermato anche dalle forti riduzioni nei due casi dell'errore standard.

4 - Effetti di variazioni dei tassi d'interesse sul valore dei titoli a medio e lungo periodo

Le equazioni presentate nel paragrafo precedente possono essere utilizzate per quantificare l'ammontare dei guadagni e le perdite in conto capitale che hanno interessato i titoli a medio e lungo termine in conseguenza delle oscillazioni dei rendimenti effettivi. Il problema è di isolare gli effetti di tali oscillazioni da quelli dovuti alle variazioni della vita residua. La funzione che determina il corso al tempo t può essere scritta come

$$(4.1) \qquad p(t) = F(c, N - t, r(t))$$

Differenziando rispetto al tempo, si ha la seguente scomposizione della variazione di p(t).

$$(4.2) \qquad \frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{p} = - \frac{dF}{d(N-t)} \cdot \frac{1}{F} + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{1}{F} \cdot \frac{dr}{dt}$$

dove

$$- \frac{dF}{d(N-t)} \gtrless 0 \leftrightarrow c \gtrless r(t)$$

e $\frac{dF}{dr}$ è sempre negativo.

Per valutare l'entità del termine, $\frac{dF}{dr}$ si sono definiti i guadagni percentuali in conto capitale, come

$$GCC = \frac{F(c,\ N-t,\ r(t+1))}{F(c,\ N-t,\ r(t))} - 1$$

Al denominatore vi è p(t); al numeratore vi è il prezzo di un titolo con la stessa cedola e vita residua, ma con il rendimento effettivamente realizzatosi nel periodo successivo, assumendo un orizzonte di un anno. Questa procedura equivale a depurare dal totale della variazione del titolo quella parte che è dovuta a variazioni della vita residua. Nella tavola 5 sono riportate la variabile GCC per il totale dei titoli detenuti dal pubblico (calcolata utilizzando l'equazione 3 della tavola 4), e la variazione percentuale del tasso medio sui titoli a medio e lungo termine (moltiplicata per -1). Quest'ultima variabile rappresenta i guadagni in conto capitale nell'ipotesi di titoli irredimibili. In media i guadagni e le perdite effettivi sono stati circa la metà dei guadagni e delle perdite che si sarebbero avuti nell'ipotesi di titoli irredimibili. Tale differenza aumenta nell'ultimo periodo presumibilmente a causa dell'accorciamento della vita media. Le maggiori perdite si sono avute nel 7601 (12 per cento fra il 7601 e il 7701) e nell'8002 (11 per cento fra l'8002 e l'8102).

5 - Stima di forma ridotta

In questo paragrafo si presenta una forma ridotta che consente di mettere in relazione direttamente il corso dei titoli con i rendimenti effettivi senza far uso dei dati sulla cedola e la vita media.

Per la specificazione ci si può avvalere di due constatazioni. La prima è che vi è una relazione abbastanza stretta fra la cedola delle nuove emissioni e i rendimenti effettivi (cfr. tavola 6): si può dunque ipotizzare

$$c_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r_{t-j} + \varepsilon_t \tag{5.1}$$

La cedola media sullo stock in essere sarà data da

$$\bar{c}_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t,i} \quad c_{t-i} \tag{5.2}$$

dove $w_{t,i}$ rappresenta la quota dei titoli emessi in t-i e sopravvissuti fino a t. Il ritardo distribuito deve essere abbastanza lungo se la cedola media era al 6,7 per cento all'inizio del '76 quando i tassi erano all'11 per cento e al 9,8 per cento alla fine del 1982, con i tassi al 20 per cento (cfr. tavola 7).

Particolarmente lento, a causa della più lunga vita media, è il ritardo nell'aggiustamento delle obbligazioni emesse da enti diversi dal settore statale. Ai fini della stima econometrica si deve imporre una restrizione sui pesi $w_{t,i}$. In quanto segue, si pone

$$w_{t,i} = w_i \tag{5.3}$$

ossia pesi fissi. La restrizione è chiaramente falsa: alla luce però del fatto, documentato nella tavola 7, che la cedola media è una variabile che si muove molto lentamente nel tempo, si può pensare che l'imposizione della (5.3), pur introducendo una distorsione nelle stime, non porti ad un forte peggioramento del fit dell'equazione.

L'altra constatazione di cui ci si può avvalere è che una parte notevole della varianza del corso è spiegata dal termine c/r, ossia il valore attuale di una rendita. La tavola 8 documenta l'entità dell'errore che si commette nella valutazione del corso quando si faccia l'ipotesi di scadenza infinita. L'errore è naturalmente nullo quando il rendimento effettivo è uguale al tasso nominale (posto nella tavola uguale al 10%). L'errore massimo si verifica quando il rendimento è inferiore alla cedola: ad esempio, con la cedola al 10% ed il rendimento al 5%, il corso viene sopravvalutato del 23% per un titolo ventennale. Si noti però che quando il rendimento è superiore alla cedola (che è la situazione che mediamente si è verificata negli anni '70), l'errore che si commette è abbastanza ridotto anche per un titolo a scadenza 10 anni (.58 per il titolo decennale contro .5 per il titolo irredimibile quando il rendimento effettivo è del 20%). Per scadenze attorno ai 20 anni l'errore è trascurabile.

Queste constatazioni legittimano una linearizzazione della funzione del corso del titolo i-esimo, che metta in evidenza il termine c/r. Dunque la seguente funzione

$$p_{ti} = \frac{c_i}{r_{ti}} (1-(1+r_{ti})^{-N_{ti}}) + (1+r_{ti})^{-N_{ti}}$$

viene linearizzata attorno ai valori medi (fra i diversi titoli ed anche, a differenza di quanto fatto nella sezione 3, nel tempo) delle variabili

$$x_1 = \frac{c_i}{r_{ti}} \; ; \quad x_2 = N_{ti} \quad ; \quad x_3 = (1 + r_{ti})^{-1}$$

Si ottiene

$$(5.4) \qquad p_{ti} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

dove $\qquad a_o$ = costante

$$a_1 = \frac{dp_{ti}}{dx_1} = (1 - (1+\bar{r})^{-\bar{N}})$$

$$(5.5) \qquad a_2 = \frac{dp_{ti}}{dx_2} = -(1+\bar{r})^{-\bar{N}}(1 - \frac{\bar{c}}{\bar{r}})\log(1+\bar{r})$$

$$a_3 = \frac{dp_{ti}}{dx_3} = \bar{N}(1+\bar{r})^{-\bar{N}+1}(1 - \frac{\bar{c}}{\bar{r}})$$

Ipotizzando piatta la struttura per scadenza dei tassi di interesse (per cui $r_{ti} = r_t$), utilizzando la (5.1) (trascurando l'"error in variables" derivante da ε_t), la (5.2) e la (5.3) e notando che $\sum_{i=o}^{\infty} w_i = 1$, si ottiene un'espressione fortemente approssimata per il corso medio.

$$\bar{p} = a_0 + a_1 \frac{1}{r_t} \sum_{i=0}^{\infty} w_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j r_{t-i-j} + a_2 N_t + a_3 (1+r_t)^{-1} + u_t$$

dove N_t è la vita media dei titoli in essere al tempo t.

Ponendo $N_t = A(L)x_t$

dove L = operatore ritardo

x_t = (INFL,FAB/PIL...)

INFL = tasso d'inflazione

FAB = fabbisogno del settore statale

e sistemando i termini si ottiene:

$$(5.6) \qquad \bar{p}_t = (a_0 + w_0 b_0) + a_1 \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{r_{t-1-i}}{r_t} + a_2 A(L)x_t + a_3 (1+r_t)^{-1} + u_t$$

dove

$$(5.7)\quad \sum_{i=o}^{\infty} \gamma_i \; r_{t-1-i} = \left[\sum_{i=o}^{\infty} w_i \sum_{j=o}^{\infty} b_j \; r_{t-i-j}\right] - w_o b_o r_t$$

La (5.6) è stata stimata per il periodo 7102 -8204 (cfr. tavola 9,equazione 1). Il ritardo distribuito è stato troncato al 28° trimestre ed il problema della collinearità fra le variabili sfasate è stato risolto utilizzando solo un ritardo ogni 4; non sembra infatti appropriato in questo caso imporre una "smoothness prior" tramite l'uso di un vincolo polinomiale. La variabile x_t (presente nelle equazioni 1 e 2 della tavola 9) è stata approssimata con quattro ritardi sul tasso di crescita trimestrale del deflatore del PIL e con il fabbisogno del settore statale in rapporto al PIL a prezzi correnti.

Il"fit" dell'equazione è elevato. Lo standard error di .009 va confrontato con valori della variabile dipendente fra .70 ed 1, il che comporta errori percentuali compresi attorno all'1 per cento. Nonostante l'ovvia presenza di mispecificazione, non vi è autocorrelazione dei residui fino al quart'ordine.

Per valutare la plausibilità delle stime si può simulare l'equazione, ma si può anche accertare che le stime siano compatibili con valori ragionevoli dei parametri (non identificati) che entrano nella espansione forma lineare (5.4). Utilizzando la (5.5) si ha

$$(1-(1+\bar{r})^{-\bar{N}})\ b = .25$$

(5.8)

$$\bar{N}\ (1+\bar{r})^{-(\bar{N}-1)}\ (1 - \frac{\bar{c}}{\bar{r}}) = .99$$

La tavola 10 riporta valori di $\bar{c}$, $b(b = \Sigma_j \gamma_j)$, $\bar{N}$ ed $\bar{r}$ che risolvono il sistema(5,8),in uno scanning effettuato sui seguenti intervalli

$.06 \leq c \leq .1$

$.04 \leq b \leq 1$

$5 \leq N \leq 20$

$.09 \leq r \leq .15$

$\bar{c}$, $\bar{N}$ ed $\bar{r}$ tendono a collocarsi abbastanza vicino ai loro valori storici. Il coefficiente b (che misura l'entità dell'aggiustamento dei tassi nominali sui nuovi titoli rispetto a variazioni dai rendimenti effettivi) sembra abbastanza basso; solo nell'ipotesi che la vita media nel campione sia stata di 5 anni, b può assumere valore .7. Per verificare se tale valore sia la conseguenza della distorsione da aggregazione, si possono utilizzare le stime del paragrafo 3 che suggeriscono una sottostima del coefficiente di $\tilde{p}$ del

12% (.88 anziché 1). Ciò comporta un errore dello stesso ammontare dei coefficienti $a_1 \Sigma \gamma_i$ e a_3. Ripetendo lo scanning, dopo aver così riproporzionato i coefficienti, si ottengono valori solo lievemente più elevati di b. In particolare un coefficente di .7 diventa compatible con una vita media di 7 anni (con la cedola al 7% e il rendimento al 10%), mentre con una vita media di 5 anni si può avere b = .8 (con la cedola uguale al 7% e il rendimento all'11%).

Contrario alle aspettative è il segno delle altre due variabili incluse (inflazione e fabbisogno). L'ipotesi è infatti che un aumento dei loro valori riduca la vita media: ciò avviene in parte perché non si rinnovano i titoli in scandenza e in parte perché i titoli che vengono rinnovati hanno vita media più corta. Il primo dei due fenomeni (mancato rinnovo dei titoli in scadenza) dovrebbe portare meccanicamente (ossia a parità di rendimento ed in virtù del solo trascorrere del tempo) ad un temporaneo avvicinamento del corso all'unità. Si noti comunque che il coefficiente del fabbisogno è scarsamente significativo (del tutto non significativi sono risultati i coefficienti ritardati) mentre quelli dell'inflazione, pur significativi, sono molto piccoli in valore assoluto. Un aumento di 10 punti del tasso di inflazione annuo riduce il corso dei titoli di soli .023 punti (ossia, ad esempio, da 1 a .977) in 5 trimestri. Tale effetto negativo è robusto rispetto a modifiche della specificazione dei ritardi e all'eliminazione della variabile fabbisogno/ PIL. Una spiegazione possibile è che l'inflazione sia correlata con alcune delle variabili escluse ed in particolare con i termini di second'ordine che sono omessi in questa specificazione. Le caratteristiche dell'equazione comunque cambiano pochissimo quando si omettono le variabili inflazione e fabbisogno/PIL, ossia si postuli implicitamente una vita media all'incirca costante nel corso del periodo di stima (cfr. eq. 3): lo standard error aumenta di meno dell'1 per mille, il coefficiente di a_3 rimane immutato mentre $a_1 \Sigma\gamma_i$ passa da .24 a .31. Compaiono segni di autocorrelazione dei residui (Durbin Watson = 1.58), correggendo la quale però i valori dei coefficienti stimati rimangono pressochè immutati (eq. 4).

La tavola 11. mostra gli effetti di un aumento di 5 punti del rendimento effettivo a partire dal 7204, trimestre nel quale il corso medio era pari a .93, utilizzando l'equazione 1.

Inizialmente si ha una caduta di .14 punti (ossia da . 93 a .79); successivamente, man mano che i vecchi titoli vengono a scadenza, il corso ritorna al suo valore che è funzione delle condizioni di emissione e delle successive oscillazioni dei tassi di interesse. Si noti che il corso non torna esattamente al valore storico per il fatto che i tassi nominali hanno una relazione non lineare con i rendimenti effettivi. Questo fatto spiega anche il permanere di un andamento lievemente oscillatorio della differenza fra valori simulati ed effettivi nel periodo successivo al 1976. I risultati di questa simulazione possono essere confrontati con i valori che si ottengono utilizzando la formula esatta per la determinazione del corso di un titolo con rimborso del capitale alla scadenza (cfr. tav. 11. B). Come si vede i valori sono molto simili specialmente per tassi elevati e scadenze brevi. Un coefficiente di .144 può essere il risultato, ad esempio, di una vita media pari a 5 anni e di un rendimento compreso fra il 10 e il 12 per cento, oppure di una vita di 9 anni e di un tasso del 14 per cento. Il confronto naturalmente è soltanto indicativo in quanto la formula utilizzata è valida per il singolo titolo e non può tenere conto degli effetti di variazione dei rendimenti sull'intera distribuzione dei corsi, di cui la variabile dipendente dell'equazione stimata è la media.

Per quanto riguarda le proprietà di lungo periodo, si osservi che in tutte le equazioni presentate nella tavola 9 i coefficienti sommano approssimativamente all'unità: correttamente ciò comporta che, quando i tassi nominali sullo stock in essere si siano adeguati ai rendimenti , i titoli siano quotati alla pari.

Appendice

a) Derivazione della funzione della vita matematica

Formalmente il problema è il seguente: trovare N^* in funzione di c, r ed N tale per cui valgano le seguenti relazioni, in cui P è la rata per capitale e interessi:

$$(A.1) \quad \int_0^{N^*} ce^{-rt}\,dt + e^{-rN^*} = \int_0^{N} Pe^{-rt}\,dt$$

$$(A.2) \quad \int_0^{N} Pe^{-ct}\,dt = 1$$

La (A.2) definisce la relazione fra la rata di un titolo francese e il tasso nominale, utilizzando il fatto che quando il rendimento è uguale al tasso nominale il titolo è quotato alla pari (cfr. G. Ottaviani: "Lezioni di Matematica Finanziaria", Roma 1962).

Risolvendo la (A.2) si ottiene:

$$(A.3) \quad P = c/(1 - e^{-cN})$$

Integrando ambo i membri della (A.1), dopo avervi sostituito la (A.3), si ha:

$$\frac{c}{r}(1 - e^{-rN^*}) + e^{-rN^*} = \frac{c}{r}\ \frac{1-e^{-rN}}{1-e^{-cN}}$$

che può essere risolta per N*.

$$(A.4) \qquad N^* = \frac{1}{r} \log \frac{1 - \frac{c}{r}}{\frac{c}{r}\{\frac{1-e^{-rN}}{1-e^{-cN}} - 1\}}$$

La(A.4) consente di valutare N* per qualunque divergenza fra tasso nominale e rendimento. Il caso più interessante è quello in cui il prezzo del titolo sia vicino alla pari. Applicando la regola dell'Hospithal:

$$(A.5) \qquad \bar{N}^* = \lim_{r \to c} N^* = \frac{1}{c} \log \frac{e^{cN}-1}{cN}$$

Si noti che per c = r la funzione non è definita. Intuitivamente, il motivo è che quando il tasso nominale è uguale al rendimento, il titolo è quotato alla pari qualunque sia la sua scadenza.

b) Derivazione della funzione della vita media

Si considerino le seguenti relazioni, dove $x(t)$ è la quota di capitale corrisposta al tempo t:

(A.6) $V = \int_0^N x(t)\, t dt$ definizione della vita media.

(A.7) $P = x(t) + c(1 - \int_0^t x(\tau) d\tau)$ scomposizione della rata fra rimborso del capitale e interessi sul capitale residuo.

(A.8) $\int_0^N Pe^{-ct} dt = 1$ relazione fra la rata e il tasso nominale.

(A.9) $\int_0^N x(t) dt = 1$ condizione che tutto il capitale venga rimborsato.

Essendo P una costante, si può differenziare la (A.7) rispetto a t, ottenendo:

(A.10) $\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{x} = c$

ossia il tasso di crescita della quota di capitale è uguale al tasso nominale di interesse. Si ha , perciò, risolvendo la(A.10)

$$x(t) = x(0)e^{ct} + K$$

x(0), ossia il primo rimborso, e K sono determinati dalle due relazioni

$$\text{(A.11)} \quad P = x(0) + c$$

$$\text{(A.12)} \quad \int_0^N (x(0)e^{ct} + K)dt = 1$$

che sono soddisfatte solo per

$$K = 0$$

$$\text{(A.13)} \quad x(0) = \frac{1}{\int_0^N e^{ct}\, dt}$$

Sostituendo (A.13) nella (A.6), si ottiene:

$$V = \int_0^N \frac{e^{ct}}{\int_0^N e^{ct}\, dt} t dt$$

che integrando per parti ha soluzione

$$\text{(A.14)} \quad V = N \frac{e^{cN}}{e^{cN} - 1} - \frac{1}{c}$$

c) Relazione fra vita media e vita matematica

Si definisca

$$\text{(A.15)} \quad z = cN$$

e quindi, facendo uso della (A.5), per $r \to c$

$$\text{(A.16)} \quad y = N^{*} z = N \log \frac{e^{z} - 1}{z}$$

da cui

$$\frac{dy}{dz} = N\left(\frac{e^{z} - 1}{z} \right)^{-1} z^{-2} (ze^{z} - e^{z} + 1) = N\left(\frac{e^{z}}{e^{z} - 1} - \frac{1}{z} \right)$$

Perciò, in base alle equazioni (A.14)-(A.16)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dN^{*}}{dz} z + N^{*} = V$$

ossia

$$V = N^* + \frac{dN^*}{dc} cN$$

che è una semplice equazione differenziale del prim'ordine in c.

La tavola 3 riporta i valori di N, N^*, V^*, e di $(V-N^*)$, per valori di c compresi fra .05 e .20.

NOTE

(1) Cfr. G. Cristini: "Il mercato obbligazionario italiano negli anni '70", Bancaria, febb.1981; e B. Bianchi: "Recenti sviluppi del mercato obbligazionario", Bancaria, ott. 1980.

(2) La definizione usuale di vita matematica è la scadenza di un singolo pagamento il cui valore attuale sia uguale a quello della nuda proprietà del titolo. Facendo uso della eguaglianza di Achard, tale definizione coincide con quella riportata nel testo (cfr. E. Levi "Corso di matematica finanziaria e attuariale", Giuffrè 1964, p.376.)

(3) La metodologia utilizzata per la costruzione delle tavv. 2 e 3 è spiegata nell'Appendice dove si ricavano anche delle formule per la vita media (V) e la vita matematica (N^*) in funzione del tasso di interesse (c) e della scadenza all'ultimo rimborso (N) e si dimostra che esse sono legate dalla seguente equazione differenziale:

$$N^*(c,N) = V(c,N) - \frac{dN^*}{dc}\,cN$$

L'analisi è riferita a titoli ad ammortamento francese per il fatto che essi rappresentano la quasi totalità dei titoli a rimborso graduale.

(4) Il corso secco (pse) e il corso tel quel (ptq) sono definiti come (cfr. R. Veccia e L. Capomassi, op.cit.):

$$pse = ptq - kc$$
$$ptq = p(1+kr)$$

dove p è dato dalla formula (2.1) e k è il numero di giorni trascorsi dall'ultimo pagamento in rapporto al totale dei giorni che intercorrono fra un pagamento e il successivo (365 per titoli con pagamenti annuali ecc.). Queste relazioni implicano

$$pse = p + (1+r)^{-N} (1- \frac{c}{r})kr$$

Per $c \to r$ oppure $N \to \infty$ si ha lim pse = p. Fuori del limite pse ha un profilo stagionale (sia pure meno marcato di quello del corso tel quel) in un intorno di p. Qualora il corso tel quel fosse definito come

$$ptq = p(1+r)^k$$

si avrebbe

$$pse = p(1+r)^k - kc$$

che è funzione di K anche per $c \to r$ e $N \to \infty$.

(5) E' improbabile che il trattamento fiscale comporti errori notevoli in quanto le emissioni di titoli tassati, dopo la riforma del 1974 sono state abbastanza modeste. A fine '82 soltanto il 17 per cento dei titoli presenti nel campione Banca d'Italia erano soggetti a imposta.

Tavola 1

Tassi d'interesse e rendimenti a un anno

Data	Tasso	Rendimento a un anno	Data	Tasso	Rendimento a un anno
6001	5.5633	8.1996	7103	8.24	19.931
6002	5.4967	5.5573	7104	7.9233	14.57
6003	5.5	4.0455	7201	7.67	11.147
6004	5.69	6.6859	7202	7.2367	4.1045
6101	5.4167	.24743	7203	7.2767	5.6276
6102	5.4933	-1.1814	7204	7.3967	3.9266
6103	5.58	-2.3053	7301	7.4033	2.9009
6104	5.6333	-2.5323	7302	7.4633	-22.729
6201	5.6967	.37192	7303	7.3967	-40.192
6202	5.86	1.5369	7304	7.6533	-54.803
6203	6.02	2.4209	7401	7.7367	-32.548
6204	6.0933	-.63533	7402	9.7167	-2.1187
6301	6	-8.5	7403	10.917	12.016
6302	6.1133	-17.224	7404	12.433	25.945
6303	6.2367	-12.577	7501	10.853	1.486
6304	6.5033	-4.2604	7502	10.867	-13.397
6401	6.87	5.3174	7503	10.797	-15.631
6402	7.54	15.895	7504	10.753	-24.337
6403	7.41	14.652	7601	11.87	-11.578
6404	7.2033	14.33	7602	13.503	4.2217
6501	6.9767	13.57	7603	13.65	6.6659
6502	6.91	12.313	7604	14.527	16.707
6503	6.8733	11.529	7701	14.653	21.432
6504	6.69	8.4339	7702	14.757	23.95
6601	6.5167	5.7494	7703	14.603	24.875
6602	6.5367	4.6499	7704	14.21	21.482
6603	6.5533	4.2644	7801	13.66	15.539
6604	6.5733	4.3421	7802	13.4	12.902
***					
6701	6.5667	3.8255	7803	13.103	10.356
6702	6.66	4.7581	7804	13.177	6.9282
6703	6.7033	5.311	7901	13.403	5.3208
6704	6.72	5.8767	7902	13.467	2.229
6801	6.7467	7.4384	7903	13.463	-3.5706
6802	6.7867	7.0322	7904	14	-2.5714
6803	6.7967	2.4808	8001	14.487	-2.7476
6804	6.7767	-6.2583	8002	14.98	-17.441
6901	6.7	-14.992	8003	15.757	-17.013
6902	6.77	-28.09	8004	16.32	-12.132
6903	7.09	-30.052	8101	16.983	-3.6055
6904	7.66	-12.357	8102	19.837	15.72
7001	8.1533	6.6407	8103	20.92	24.617
7002	9.13	18.805	8104	20.963	26.385
7003	9.7233	24.979	8201	20.48	27.641
7004	9.1933	23.008	8202	20.653	34.162
7101	8.2767	15.607	8203	20.147	33.102
7102	8.2467	20.494			

Nota: il rendimento per periodo di detenzione (r_A) è calcolato utilizzando la formula, valida esattamente nel caso di rendita.

$$r_A = r - \frac{\Delta r}{r}$$

dove r è il rendimento netto effettivo sui titoli emessi dagli Istituti di Credito Mobiliare.
I valori riportati si riferiscono ad investimenti iniziati alla data corrispondente.

Tavola 2

Corso medio dei titoli a medio e lungo termine detenuti dal pubblico

PERIODO	CORSO	PERIODO	CORSO	PERIODO	CORSO
7001	.86247	7403	.81188	7901	.85498
7002	.82542	7404	.76743	7902	.85921
7003	.84845	7501	.80852	7903	.85660
7004	.85541	7502	.80639	7904	.84117
7101	.89445	7503	.80704	8001	.82556
7102	.88333	7504	.82030	8002	.81292
7103	.89298	7601	.80362	8003	.79996
7104	.91240	7602	.75857	8004	.80222
7201	.92531	7603	.76933	8101	.78464
7202	.94258	7604	.74934	8102	.72348
7203	.94157	7701	.74335	8103	.72623
7204	.93535	7702	.75244	8104	.72466
7301	.94677	7703	.76866	8201	.72087
7302	.93493	7704	.77622	8202	.72756
7303	.94348	7801	.79833	8203	.73061
7304	.93592	7802	.80607	8204	.74946
7401	.92121	7803	.83472		
7402	.83326	7804	.83741		

Fonte: Elaborazione sulla base dei dati del campione Banca d'Italia (Bollettino, Tavv. E8 - E9).

Nota: Il dato è stato ottenuto ponderando con le detenzioni del pubblico i corsi medi secchi delle seguenti categorie di titoli:
- titoli di Stato;
- enti territoriali;
- ferrovie dello Stato;
- obbligazioni Crediop per conto del Tesoro;
- istituti di credito mobiliare;
- istituti di credito immobiliare;
- sezioni OO.PP.;
- enti pubblici;
- imprese private.

Tavola 3

Vita media e vita matematica di un titolo con rate costanti

	Tasso = 5%			Tasso = 10%			Tasso = 20%		
N	N^*	V	$V-N^*$	N^*	V	$V-N^*$	N^*	V	$V-N^*$
1.0	.5	.5	.0	.5	.5	.0	.5	.5	.0
2.0	1.0	1.0	.0	1.0	1.0	.0	1.0	1.1	.0
3.0	1.5	1.5	.0	1.5	1.6	.0	1.6	1.6	.1
4.0	2.0	2.1	.0	2.1	2.1	.1	2.1	2.3	.1
5.0	2.6	2.6	.1	2.6	2.7	.1	2.7	2.9	.2
6.0	3.1	3.1	.1	3.1	3.3	.1	3.3	3.6	.3
7.0	3.6	3.7	.1	3.7	3.9	.2	3.9	4.3	.4
8.0	4.1	4.3	.1	4.3	4.5	.3	4.5	5.0	.5
9.0	4.7	4.8	.2	4.8	5.2	.3	5.2	5.8	.6
10.0	5.2	5.4	.2	5.4	5.8	.4	5.8	6.6	.8
11.0	5.8	6.0	.3	6.0	6.5	.5	6.5	7.4	.9
12.0	6.3	6.6	.3	6.6	7.2	.6	7.1	8.2	1.1
13.0	6.9	7.2	.3	7.2	7.9	.7	7.8	9.0	1.2
14.0	7.4	7.8	.4	7.8	8.6	.8	8.5	9.9	1.4
15.0	8.0	8.4	.5	8.4	9.3	.9	9.3	10.8	1.5
16.0	8.5	9.1	.5	9.0	10.0	1.0	10.0	11.7	1.7
17.0	9.1	9.7	.6	9.7	10.8	1.1	10.7	12.6	1.9
18.0	9.7	10.3	.7	10.3	11.6	1.2	11.5	13.5	2.0
19.0	10.2	11.0	.7	11.0	12.3	1.4	12.2	14.4	2.2
***									
20.0	10.8	11.6	.8	11.6	13.1	1.5	13.0	15.4	2.4
21.0	11.4	12.3	.9	12.3	13.9	1.7	13.7	16.3	2.6
22.0	12.0	13.0	1.0	12.9	14.7	1.8	14.5	17.3	2.7
23.0	12.6	13.7	1.1	13.6	15.6	1.9	15.3	18.2	2.9
24.0	13.2	14.3	1.2	14.3	16.4	2.1	16.1	19.2	3.1
25.0	13.8	15.0	1.3	15.0	17.2	2.3	16.9	20.2	3.3
26.0	14.4	15.7	1.4	15.7	18.1	2.4	17.7	21.1	3.4
27.0	15.0	16.4	1.5	16.4	18.9	2.6	18.5	22.1	3.6
28.0	15.6	17.2	1.6	17.1	19.8	2.7	19.4	23.1	3.7
29.0	16.2	17.9	1.7	17.8	20.7	2.9	20.2	24.1	3.9
30.0	16.8	18.6	1.8	18.5	21.6	3.1	21.0	25.1	4.0

Nota: N = scadenza dell'ultimo rimborso
N^* = vita matematica
V = vita media

N^* e V sono calcolati secondo la metodologia utilizzata nell'Appendice.

Tavola 4

Distorsione dovuta all'aggregazione

Variabile dipendente: media dei corsi
Metodo di stima: OLS

EQ.		Costante	$\tilde{\beta}$	Termini del second'ordine: $r.p_{rr}\cdot\frac{1}{2}$	Termini del second'ordine: $N.p_{NN}\cdot\frac{1}{2}$	Termini del second'ordine: $r.c.p_{rc}$	Termini del second'ordine: $r.N.p_{rN}$	Termini del second'ordine: $c.N.p_{CN}$	DW	SER	R^2	Periodo di stima
1	Titoli detenuti dal pubblico	.02 (7.5)	1						.33	.015	.878	7601-8204 trim.
2	Titoli detenuti dal pubblico	.11 (2.4)	.88 (14.8)						.36	.015	.894	"
3	Titoli detenuti dal pubblico	- .93 (-1.4)	1	0.49 (1.8)	8.16 (2.1)	6.2 (3.19)	- .74 (- .45)	4.5 (2.8)	1.28	.008	.97	"
4	Titoli di Stato	.016 (14.3)	1						1.13	.005	.923	8001-8212 mensile
5	Titoli di Stato	.006 (.11)*	.92 (16.2)						1.155	.005	.923	"
6	Titoli di Stato	- .09 (-3.85)	1	.07 (5.12)	2.6 (5.9)	2.7 (9.8)	-.24 (-.90)	.71 (2.7)	2.05	.001	.956	"
7	Montecarlo	.18 (45)	.83 (166)						1.40 (.36)	.002	.998	100 osservazioni; 100 estrazioni per osservazione; 30 ripetizione dell'esperimento
8	Montecarlo	.12 (60)	.84 (280)						1.51 (.27)	.003	.998	"

Nota nella pagina seguente.

$$\tilde{p}_t = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{c_t}{(1+r_t)^i} + \frac{1}{(1+r)^{N_t}}$$

N_t = vita media ; c_t = cedola media ; r_t = rendimento medio.

Nota alla Tav. 4.

Nota: Nelle equazioni 1-3 la variabile dipendente è la media dei corsi dei titoli detenuti dal pubblico. Le variabili che entrano in $\tilde{p}$ ed i termini di second'ordine della espansione in serie (eq. 4.3 del testo) sono medie ponderate con gli stessi pesi della variabile dipendente.

Le equazioni 4-6 si riferiscono al totale dei titoli di Stato in circolazione. Nelle equazioni 3 e 6 il coefficiente di $\tilde{p}$ è vincolato all'unità, a causa dell'elevata collinearità con le altre variabili esplicative. Le equazioni 1 e 4 sono riportate per per consentire un confronto con la 3 e la 6.
Avendo ipotizzato costanti i coefficienti di correlazione fra le variabili e i rapporti fra media e varianza di ciascuna di esse, i regressori sono oltre alla costante e $\tilde{p}$, i termini

$$\frac{1}{2}\, x\, \frac{d^2\bar{p}}{dx^2} \qquad \text{per } x = \bar{r},\ \bar{N}$$

$$x.y\, \frac{d^2\bar{p}}{dx\,dy} \qquad \text{per } x,y = \bar{c},\bar{r},\bar{N}$$

Le equazioni 7 e 8 sono analoghe alla 2 e 5, con la differenza che i dati dei rendimenti e della scadenza dei singoli titoli in ogni periodo sono generati artificialmente sulla base di distribuzioni uniformi con media e varianza crescenti dalla prima all'ultima osservazione. Gli estremi della distribuzione dei rendimenti vanno da [.06 .12] a [.12 .25] e quelli della scadenza da [1 11] a [4 34] in ambedue gli esperimenti. Nel primo esperimento la correlazione fra rendimento e scadenza è posta uguale ad 1, nel secondo a .7.

I valori riportati sono le medie dei parametri stimati in 30 ripetizioni dell'esperimento; i t statistici in parentesi verificano l'ipotesi che tali medie (e non i parametri ottenuti in ogni singolo esperimento) siano uguali a zero. Fra parentesi è indicato lo scarto quadratico medio del Durbin-Watson: un valore di .36 comporta che, in un certo numero di esperimenti, il Durbin-Watson sia stato inferiore all'unità.

Tavola 5

Stima dei guadagni in conto capitale attribuibili a variazione dei rendimenti

PERIODO	GCC	DR	PERIODO	GCC	DR
7601	-12.060	-28.553	7901	-5.622	-10.401
7602	-7.483	-13.945	7902	-8.237	-13.997
7603	-4.456	-10.115	7903	-9.085	-17.579
7604	.110	.440	7904	-8.134	-16.630
7701	3.823	6.523	8001	-7.378	-15.392
7702	3.969	9.704	8002	-11.331	-28.523
7703	5.546	9.792	8003	-11.215	-31.846
7704	3.517	6.788	8004	-8.991	-28.860
7801	1.933	3.185	8101	-7.532	-22.387
7802	-.128	.877	8102	-2.628	-6.647
7803	-.783	-1.932	8103	.491	2.513
7804	-3.301	-5.850	8104	2.342	5.013

Nota: $GCC = \frac{F(c,N-t,r(t+1))}{F(c,N-t,r(t))} - 1$ (cfr. paragrafo 4 del testo)

$DR = - \frac{\Delta r}{r}$ guadagni in conto capitale nell'ipotesi di titoli irredimibili

r = rendimento medio dei titoli a medio e lungo termine non indicizzati detenuti dal pubblico.

I valori riportati si riferiscono ad investimenti annuali iniziati alla data corrispondente.

Tavola 6

PREZZO DI EMISSIONE E RENDIMENTO MEDIO EFFETTIVO DEI PRINCIPALI TITOLI A REDDITO FISSO (1)

Offerti al pubblico

Anno	TASSO NOMINALE 5% prezzo	5% rendimento	6% prezzo	6% rendimento	7% prezzo	7% rendimento	9% prezzo	9% rendimento	10% prezzo	10% rendimento	12% prezzo	12% rendimento
1960	99,0	5,25	—	—								
1968	—	—	96,2	6,60								
1970	—	—	—	—	92,68	8,18	—	—	—	—	—	—
1971	—	—	—	—	94,48	8,18	—	—	—	—	—	—
1972	—	—	—	—	98,13	7,54	—	—	—	—	—	—
1973	—	—	—	—	97,70	7,48	—	—	—	—	—	—
1974	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1975	—	—	—	—	—	—	97,17	10,83	—	—	—	—
1976	—	—	—	—	—	—	98,50	9,68	—	—	—	—
1977	—	—	—	—	—	—	—	—	89,5	13,90	—	—
1978	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,97	13,05
1979	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,30	12,87

Collocati a fermo

Anno	TASSO NOMINALE 7% prezzo	7% rendimento	8%-9% prezzo	8%-9% rendimento	10% prezzo	10% rendimento	12% prezzo	12% rendimento	13% prezzo	13% rendimento
1970	90,10	8,40	—	—	—	—	—	—	—	—
1971	90,95	8,54	—	—	—	—	—	—	—	—
1972	95,28	7,80	—	—	—	—	—	—	—	—
1973	96,25	7,65	—	—	—	—	—	—	—	—
1974	—	—	89,45	10,68	—	—	—	—	—	—
1975	—	—	86,73	11,96	—	—	—	—	—	—
1976	—	—	—	—	89,05	13,11	—	—	—	—
1977	—	—	—	—	87,15	13,98	90,30	14,13	—	—
1978	—	—	—	—	85,90	13,80	93,25	13,80	98,00	13,50
1979	—	—	—	—	—	—	—	—	98,00	13,53

(1) Sulla determinazione del rendimento incidono, oltre al prezzo di emissione e al tasso nominale, la durata del prestito, le modalità di ammortamento e i premi. I titoli offerti al pubblico sono i BTP. Quelli collocati a fermo sono prevalentemente obbligazioni degli istituti di credito mobiliare, con scadenza intorno ai 10 anni.

Fonte: Relazioni Banca d'Italia.

Riprodotto da: B. Bianchi, "Recenti sviluppi del mercato obbligazionario", Bancaria, ottobre 1980.

Tavola 7

Tasso nominale medio e rendimenti effettivi

PERIODO	CEDM	R	CMOB	ROBB4	PERIODO	CEDM	R	CMOB	ROBB4
7601	6.715	.114	6.741	11.647	7903	8.985	.135	7.721	13.717
7602	6.977	.131	6.863	13.203	7904	9.089	.140	7.835	14.243
7603	7.092	.133	6.919	13.377	8001	9.080	.147	7.856	14.833
7604	7.104	.143	6.926	14.283	8002	9.152	.152	7.919	15.297
7701	7.130	.147	6.963	14.623	8003	9.268	.159	8.037	16.007
7702	7.206	.149	6.981	14.833	8004	9.262	.164	8.029	16.460
7703	7.301	.147	6.985	14.637	8101	9.380	.169	8.119	17.093
7704	7.349	.142	7.034	14.317	8102	9.727	.196	8.168	19.940
7801	7.515	.137	7.128	13.827	8103	9.767	.209	8.226	21.067
7802	7.666	.135	7.324	13.590	8104	9.719	.211	8.171	21.007
7803	7.981	.132	7.374	13.303	8201	9.636	.207	8.300	20.773
7804	8.370	.133	7.478	13.353	8202	9.994	.209	8.904	20.970
7901	8.577	.133	7.469	13.517	8203	9.251	.204	8.292	20.537
7902	8.902	.134	7.710	13.627	8204	9.776	.200	8.303	20.180

Note: CEDM = media dei tassi nominali sui titoli detenuti dal pubblico

R = media dei tassi effettivi sui titoli detenuti dal pubblico

CMOB = media dei tassi nominali sui titoli emessi da enti diversi dal settore statale

ROBB4 = media dei rendimenti sui titoli emessi da enti diversi dal settore statale.

Tavola 8

<u>Corso dei titoli</u>

N \ r	5%	10%	15%	20%	N	5%	10%	15%	20%
1	1.0476	1	.95652	.91667	12	1.4432	1	.72897	.55608
2	1.093	1	.91871	.84722	13	1.4697	1	.72084	.54673
3	1.1362	1	.88584	.78935	14	1.4949	1	.71378	.53894
4	1.1773	1	.85725	.74113	15	1.519	1	.70763	.53245
5	1.2165	1	.83239	.70094	16	1.5419	1	.70229	.52704
6	1.2538	1	.81078	.66745	17	1.5637	1	.69764	.52254
7	1.2893	1	.79198	.63954	18	1.5845	1	.6936	.51878
8	1.3232	1	.77563	.61628	19	1.6043	1	.69009	.51565
9	1.3554	1	.76142	.5969	20	1.6231	1	.68703	.51304
10	1.3861	1	.74906	.58075	∞	2	1	.66667	.5
11	1.4153	1	.73831	.56729					

Nota: La tavola riporta il valore del corso di un titolo con rimborso alla scadenza in funzione della vita residua (N) e del rendimento effettivo r. Il tasso nominale è posto sempre uguale al 10 per cento.

Tavola 9

Variabile dipendente: media dei corsi dei titoli a medio e lungo termine non indicizzati, detenuti dal pubblico

Stime OLS

EQ.	Cost.	$a_1\Sigma Y_i$	$a_1 Y_4$	$a_1 Y_8$	$a_1 Y_{12}$	$a_1 Y_{16}$	$a_1 Y_{20}$	$a_1 Y_{24}$	$a_1 Y_{28}$	a_3	INFL	$INFL_{-1}$	$INFL_{-2}$	$INFL_{-3}$	$INFL_{-4}$	FAB/PIL
1	-.21	.24	.001	.079	.076	.062	.026	.016	-.015	.99	-.0008	-.0006	-.0003	-.0004	-.0002	.06
	(3.0)	(6.6)	(.08)	(5.58)	(5.6)	(4.1)	(1.6)	(.8)	(.6)	(11.6)	(3.5)	(2.0)	(1.2)	(1.5)	(.4)	(1.2)
2	-.24	.24	.002	.071	.079	.060	.027	.007	-.011	1.03	-.0008	-.0006	-.0002	-.0006	-.0003	-.025
	(3.6)	(6.7)	(.06)	(4.9)	(6.1)	(4.1)	(1.7)	(.4)	(.45)	(12.6)	(2.2)	(2.0)	(.76)	(2.1)	(.96)	(.48)
3	-.32	.31	.029	.081	.067	.064	.031	.017	.032	1.00						
	(5.1)	(13.5)	(2.1)	(6.2)	(5.0)	(4.0)	(1.8)	(.8)	(1.6)	(12.3)						
4	-.31	.32	.018	.11	.056	.065	.044	.014	.013	.98						
	(8.3)	(24.7)	(1.8)	(9.7)	(5.3)	(5.4)	(3.5)	(.92)	(.92)	(21.5)						

Indicatori statistici

EQ.	R^2	DW(1)	S E R	Altri indicatori
1	.99	2.05	.0088	DW(2)=2.2 DW(3)=2.0 DW(4)=1.9 Chow(7604)=1.6
2	.99	1.81	.0083	DW(2)=1.7 DW(3)=1.8 DW(4)=2.0 Chow(7604)=3.9
3	.99	1.58	.0091	DW(2)=1.9 DW(3)=2.2 DW(4)=1.8 Chow(7604)=3.7
4	.99	2.24	.0086	RHO(1)=-.11 (.68) RHO(2)=-.18 (1.3) RHO(3)=-.31 (2.7) RHO(4)=-.09 (.66)

Note:

$a_1\Sigma Y_i$ indica la somma dei coefficienti delle variabili $\frac{r_{t-i}}{r_t}$

a_3 coefficiente di $(1 + r_t)^{-1}$

INFL variazione percentuale del deflatore del PIL rispetto al trimestre precedente, in ragione annua

FAB/PIL fabbisogno del settore statale diviso prodotto interno lordo

DW(i) test di Durbin Watson per autocorrelazione di ordine i

Chow(7604) valore del test F interrompendo il periodo al 7604

RHO(i) coefficiente di autocorrelazione degli errori di ordine i

La differenza fra l'equazione 1 e la 2 consiste nel fatto che nella seconda la variabile dipendente è destagionalizzata (metodo x11 ARIMA); sulla stagionalità del corso secco cfr. nota 4 al paragrafo 3. L'equazione 4 è uguale alla 3, ad eccezione della correzione per autocorrelazione fino al 4°ordine.

Tavola 10

Valori dei parametri compatibili con le stime dell'equazione 1 - Tav. 9

c	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.08	.08	.09	.09	.09
b	.40	.40	.40	.50	.60	.70	.40	.50	.40	.40	.50
N	9.00	11.00	13.00	9.00	5.00	5.00	7.00	7.00	7.00	9.00	7.00
r	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.11	.11	.13	.13	.13

Note: c = cedola media

b = $\sum_j \gamma_j$ sensibilità di lungo periodo dei tassi nominali rispetto a variazioni dei rendimenti effettivi

N = vita media

r = rendimento

Tavola 11

Aumento permanente di 5 punti del rendimento effettivo

A. Equazione 1 - tav. 9

DATE	SIM-ACT	DATE	SIM-ACT	DATE	SIM-ACT
7102	0	7502	-.068956	7902	-.029624
7103	0	7503	-.069954	7903	-.03014
7104	0	7504	-.046342	7904	-.033138
7201	0	7601	-.039659	8001	-.030878
7202	0	7602	-.036235	8002	-.030917
7203	0	7603	-.037611	8003	-.0279
7204	-.14436	7604	-.020708	8004	-.026778
7301	-.14226	7701	-.017808	8101	-.024617
7302	-.14516	7702	-.019726	8102	-.01851
7303	-.15026	7703	-.021362	8103	-.016399
7304	-.14345	7704	-.018051	8104	-.016531
7401	-.13859	7801	-.019366	8201	-.017847
7402	-.10783	7802	-.025246	8202	-.018069
7403	-.096343	7803	-.028182	8203	-.019268
7404	-.060622	7804	-.027012	8204	-.020781
7501	-.069278	7901	-.026033		

B. Utilizzando la formula esatta

R1	5	7	9	11	13	15	17	19
.06	-.185	-.236	-.277	-.310	-.337	-.360	-.377	-.392
.08	-.166	-.205	-.234	-.255	-.270	-.281	-.289	-.294
.1	-.150	-.180	-.199	-.211	-.218	-.222	-.223	-.223
.12	-.136	-.158	-.170	-.176	-.178	-.177	-.175	-.172
.14	-.123	-.139	-.146	-.147	-.146	-.142	-.139	-.135
.16	-.111	-.122	-.125	-.124	-.120	-.116	-.111	-.107

TEMI DI DISCUSSIONE RECENTEMENTE PUBBLICATI (*)

n. 21 - L'andamento dei profitti bancari rispetto al ciclo economico, di V. Sannucci (giugno 1983)

n. 22 - I conti economici e le situazioni patrimoniali degli istituti di credito speciale: 1975-1981, di D. Franco (giugno 1983)

n. 23 - L'andamento del grado di rischio dell'attività bancaria, di A.M. Giannoni (giugno 1983)

n. 24 - Costi e margini del sistema bancario italiano: un'analisi comparata, di F. Passacantando (giugno 1983)

n. 25 - L'attività internazionale delle banche italiane: informazioni statistiche, di G. Giordano (novembre 1983)

n. 26 - Il reddito da lavoro dipendente nelle indagini campionarie della Banca d'Italia dal 1972 al 1981: evoluzione e determinanti, di R.A. Pirrotta - G. Zen (dicembre 1983)

n. 27 - L'utilizzo dell'analisi discriminatoria per la previsione delle insolvenze: ipotesi e test per un'analisi dinamica, di S. Appetiti (marzo 1984)

n. 28 - La domanda di BOT da parte del pubblico, di E.A. Zautzik (aprile 1984)

n. 29 - Real balances, the exchange rate, and indexation: real variables in disinflation, by S. Fischer (giugno 1984)

n. 30 - Il bilancio pubblico per il quinquennio 1984-88: alcune simulazioni, di G. Morcaldo - G. Salvemini (luglio 1984)

n. 31 - Funzioni aggregate d'investimento, di M. Magnani - R. Valcamonici (agosto 1984)

n. 32 - Un'indagine econometrica sui consumi nazionali (1972-1981), di G. Marotta (agosto 1984)

n. 33 - Short-term interest rate linkages between the United States and Europe, by S. Micossi - T. Padoa-Schioppa (agosto 1984)

n. 34 - La condizione di additività nella stima di sistemi di equazioni simultanee, di C.A. Bollino (agosto 1984)

n. 35 - La relazione tra orari di fatto e ore contrattuali nell'industria italiana, di G. Bodo - C. Giannini (settembre 1984)

(*) I "Temi" pubblicati possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.