Agosto 1984

34

Servizio Studi
della
Banca d'Italia

# TEMI DI DISCUSSIONE

Carlo A. BOLLINO

**La condizione di additività nella stima di sistemi di equazioni simultanee**

# LA CONDIZIONE DI ADDITIVITA' NELLA STIMA DI SISTEMI DI EQUAZIONI SIMULTANEE

di

Carlo Andrea Bollino

Questa nota si propone di fornire una rassegna sintetica dei problemi connessi con la stima di sistemi di equazioni sotto condizione di additività. La metodologia econometrica rilevante viene presentata in una serie di teoremi e corollari in ordine crescente di generalità. Nel tentativo di offrire una guida allo studioso nella fase empirica, le osservazioni conclusive richiamano gli esempi più diffusi nella letteratura di stima di modelli che discendono da ipotesi di allocazione ottimale vincolata, quali la domanda di beni di consumo, la domanda di fattori produttivi da parte dell'impresa e il processo di allocazione di portafoglio.

# LA CONDIZIONE DI ADDITIVITA'
# NELLA STIMA DI SISTEMI DI EQUAZIONI SIMULTANEE(*)

## 1 - Introduzione

Lo scopo di questa nota è di fornire una rassegna sintetica dei problemi connessi con la stima di sistemi di equazioni sotto condizione di additività. La condizione di additività, frequentemente ricordata nella letteratura anche come "condizione di sommabilità", "vincolo di bilancio" o "vincolo di portafoglio", occupa una posizione fondamentale nella teoria economica moderna, in quanto essa impone una restrizione sullo spazio delle variabili obiettivo di qualsiasi problema di allocazione ottimale di risorse scarse, siano esse rappresentate da beni scelti dal consumatore, da fattori produttivi richiesti dall'impresa o da decisioni di portafoglio su attività finanziarie.

---

(*) Vorrei ringraziare F.Barca, R. Filosa, N. Rossi, e I. Visco per gli utili suggerimenti ricevuti durante la stesura di questa nota. Ogni errore è, ovviamente, mio. Le opinioni espresse in questo lavoro sono personali e non riflettono quelle della Banca d'Italia.

In generale, la condizione di additività si pone come problema nella fase di stima empirica quando, a fronte del vincolo operante sulle relazioni funzionali di un insieme di variabili economiche, si vogliano ottenere valori stimati econometricamente che soddisfino tali vincoli, dai modelli lineari di probabilità a insiemi di quote esaustive di un aggregato o a blocchi di modelli macroeconomici legati da identità contabili.

Consideriamo alcuni semplici esempi di problemi economici che si dimostreranno rilevanti per l'esposizione seguente. Nel caso di un'impresa si ipotizzi che, data una struttura di prezzi e un obiettivo di spesa, si voglia caratterizzare la combinazione ottimale di due fattori produttivi. E' evidente che è sufficiente osservare il risultato della decisione relativa all'impiego del primo fattore per caratterizzare completamente il problema, in quanto la decisione relativa all'altro fattore è vincolata alla precedente. Alternativamente, si consideri il problema di diversificazione di data ricchezza da parte di un operatore sui mercati finanziari, nota la struttura di rendimenti di attività in presenza di rischio. Anche in questo caso non è necessario disporre di informazioni su tutte le attività possedute dall'operatore per definire il problema, in quanto la decisione relativa all'ultima attività è già implicita nelle precedenti. Analoghe considerazioni valgono nel caso più complesso di modelli di equilibrio economico generale. Infine, si consideri una matrice di transizione di probabilità (ad es.: natalità, modifica della dimensionalità e mortalità delle unità di un sistema produttivo), oppure il problema di ottenere stime trimestrali di un insieme di serie disaggregate annuali, noto il profilo trimestrale dell'aggregato totale di queste.

In definitiva, la casistica precedente può essere ricondotta al noto problema di un sistema simultaneo di equazioni singolare. Dal punto di vista dell'inferenza statistica, questo significa che le informazioni contenute nell'ultima equazione sono ridondanti e quindi la stima della struttura stocastica di dimensionalità ridotta di un grado è sufficiente per l'analisi completa del problema.

La discussione si articola secondo uno schema di generalità crescente, concentrando l'attenzione sulle condizioni sufficienti che garantiscono il rispetto dell'additività nella fase di stima. La sezione 2 tratta dell'additività nella regressione semplice. La sezione 3 estende l'analisi alla regressione multipla lineare con l'ipotesi di regressori comuni. L'attenzione dedicata a questo caso speciale è motivata dal fatto che la natura intrinseca di un sistema di allocazione ottimale porta frequentemente alla specificazione di un sistema che sia funzione di uno stesso insieme di variabili, ad esempio tutti i prezzi (i rendimenti) e il reddito (la ricchezza) nella domanda di beni di consumo (di attività finanziarie). Alternativamente, il sistema con regressori comuni può essere visto come forma ridotta di una data forma strutturale. La sezione 4 offre ulteriori considerazioni nel caso della regressione lineare, discutendo il ruolo delle condizioni di identificazione del sistema. La sezione 5 affronta il problema generale nell'ambito della regressione non lineare e analizza i problemi di eteroschedasticità e di autocorrelazione degli errori del sistema. Alla sezione 6 sono affidati alcuni commenti conclusivi.

## 2 - Regressione semplice

Sia $\{y_{ij}\}$ un insieme di variabili contraddistinte dall'indice i, per i = 1, 2,...,m e dall'osservazione j, per j = 1, 2,...,n.

Sia valida la relazione:

(1) $$\sum_i y_{ij} = y_i \qquad \forall_j$$

che definisce la condizione di additività.

Si consideri la relazione:

(2) $$y_{ij} = a_i + b_i y_j + u_{ij} \qquad \forall_i$$

Un esempio classico della (2) è costituito dall'analisi di Allen e Bowley (1935) di curve di Engel dove $y_{ij}$ è la spesa per il bene i della famiglia j e $y_j$ è la spesa totale della famiglia j.

Teorema 1:

Se vale (1), la stima minimi quadrati della (2) soddisfa la relazione:

(3) $$\sum_i a_i = 0 \qquad \sum_i b_i = 1 \qquad \sum_i u_{ij} = 0$$

Dimostrazione:

Siano: $\hat{b}_i = \dfrac{\sum\limits_j y_j^+ y_{ij}^+}{\sum\limits_j y_j^{+2}}$ $\qquad \hat{a}_i = \bar{y}_{ij} - \dfrac{\sum\limits_j y_j^+ y_{ij}^+}{\sum\limits_j y_j^{+2}} \bar{y}_j$

dove: " - " denota la media,

" + " denota scarti dalla media.

Si avrà:

$$\sum_i \hat{y}_{ij} = \sum_i \hat{a} + y_j \sum \hat{b}_i$$

$$= \sum_i \left[ \bar{y}_{ij} - \frac{\sum y_j^+ y_{ij}^+}{\sum y_j^{+2}} \bar{y}_j + \frac{\sum y_j^+ y_{ij}^+}{\sum y_j^{+2}} y_j \right] = \bar{y}_j - \frac{\sum y_j^{+2}}{\sum y_j^{+2}} \bar{y}_j + \frac{\sum y_j^{+2}}{\sum y_j^{+2}} y_j = y_j$$

e:

$$\sum u_{ij} = y_j - \sum \hat{y}_{ij} = 0 \qquad \text{QED.}$$

Il teorema 1 giustifica quindi l'affermazione, frequentemente adottata nella letteratura empirica, che in questo caso " la stima minimi quadrati soddisfa automaticamente la condizione di additività".

## 3 - Regressione lineare: caso con regressori comuni

Sia il sistema in forma generale:

(4) $\quad y_i = X_i\beta_i + e_i \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

dove: $y_i$ è un vettore $(n \times 1)$ di variabili endogene

$X_i$ è una matrice $(n \times k_i)$ di variabili esplicative

$\beta_i$ è un vettore $(k_i \times 1)$ di coefficienti

$e_i$ è un vettore $(n \times 1)$ di errori.

Sotto ipotesi classiche si avrà dunque:

$$\text{cov}\,(e_i) = \sigma_{ii} I.$$

Il sistema (4) può essere scritto in forma compatta come:

(5) $\quad y = X\beta + e$

dove: $y = \text{vec}(y_i)$

$X = \text{diag}(X_i)$

$\beta = \text{vec}(\beta_i)$

$e = \text{vec}\,(e_i)$

Definendo $cov(e) = \Sigma \otimes I = \Phi$ , si ha lo stimatore minimi quadrati generalizzati (GLS):

$$(6) \qquad \hat{\beta}_{GLS} = (X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y$$

Un importante caso speciale del sistema (5) è dato dalle ipotesi:

$$(7) \qquad X_i = X^* \forall i$$

$$(8) \qquad Yu = x$$

dove: $X^*$ è una matrice di ordine $(n \times k^*)$
$Y = y_1, \dots, y_m$ è di ordine $(n \times m)$
$u$ è un vettore unitario $(m \times 1)$
$x$ è un vettore $(n \times 1)$.

La (7) esprime l'ipotesi di un insieme comune di regressori nella (5). La (8) definisce la condizione di additività delle $y_i$.

<u>Lemma 1</u>:

Sia dato il sistema (5). Se vale la (7) allora lo stimatore (6) è equivalente allo stimatore minimi quadrati ordinari (OLS):

$$(6A) \quad \hat{\beta}_{i_{OLS}} = (X^{*\prime}X^{*})^{-1}X^{*\prime}y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

<u>Dimostrazione</u>(1):

Data la (7) si ha:

$$X = (I \otimes X^{*})$$

Ne segue che:

$$(X'\Phi^{-1}X) = [(I \otimes X^{*})' (\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes X^{*})]^{-1} = [\Sigma^{-1} \otimes X^{*\prime}X^{*}]^{-1}$$

e quindi:

$$(X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1} = (\Sigma \otimes X^{*\prime}X^{*})^{-1}(\Sigma^{-1} \otimes X^{*\prime}) = I \otimes (X^{*\prime}X^{*})^{-1} X^{*\prime}$$

che dimostra l'uguaglianza fra (6) e (6A). QED.

Si definisca $B = (\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m)$ come la matrice dei coefficienti stimati della (5). Sia, inoltre, senza perdita di generalità, $X^* = (Z, x)$. La ripartizione a blocchi evidenzia $x$ come l'ultima colonna di $X^*$. $Z$ è evidentemente di dimensione $(n \times (k^*-1))$.

Teorema 2:

Sia dato il sistema (5). Se vale la (8) allora lo stimatore (6A) soddisfa:

$$(9) \qquad B\,u = \binom{0}{1}$$

dove 0 è un vettore nullo di ordine $(k^*-1) \times 1$.

Dimostrazione:

Si consideri la (6A) (notando la validità del lemma 1 sotto la condizione (8) mediante l'uso di $\Sigma^+$, inversa generalizzata di $\Sigma$, al posto di $\Sigma^{-1}$):

$$\hat{\beta}_i = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

che possiamo riscrivere come:

$$\begin{aligned} B &= (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y \\ &= \left[(Z,x)^\prime \ (Z,x)\right]^{-1} (Z,x)^\prime \ Y \\ &= \begin{bmatrix} Z^\prime Z & Z^\prime x \\ x^\prime Z & x^\prime x \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z^\prime \\ x^\prime \end{bmatrix} Y \end{aligned}$$

Applicando la regola dell'inversa di matrice a blocchi (2), si ottiene:

$$B = \begin{bmatrix} M & -MZ'xq \\ -qx'ZM & q + qx'ZMZ'xq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z' \\ x' \end{bmatrix} Y$$

dove: $q = (x'x)^{-1} = 1/x'x$ (scalare)

$$M = \left[Z'Z - Z'xx'Zq\right]^{-1}$$

Si avrà allora, applicando la (8):

$$Bu = \begin{bmatrix} MZ'Yu - MZ'xx'Yu\ q \\ \\ -x'ZMZ'Yu\ q + qx'Yu + x'ZMZ'xx'Yu\ q^2 \end{bmatrix}$$

Si noti che:

$$x'x\ Yu\ \ q = x(x'x)\ q = x$$

e quindi:

$$Bu = \begin{bmatrix} MZ'x - MZ'x \\ \\ -x'ZMZ'x\ q + (x'x)^{-1}(x'x) + x'ZMZ'x\ q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .\quad \text{QED.}$$

Il teorema 2 dimostra come i valori stimati del sistema (5) soddisfino la (8), in virtù di:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$

e quindi: $\hat{Y} = X^{*}B$

da cui: $\hat{Y}u = (Z,x)\ Bu$

cioè: $\hat{Y}u = (Z,x)\binom{0}{1}$

$$\hat{Y}u = x \tag{8A}$$

La (8A) assicura quindi che per qualsiasi valore di x la condizione di additività è rispettata. Ciò significa che, ad esempio in sede di previsione fuori dal campione, il sistema genera valori che sono coerenti con la struttura teorica insita nella specificazione considerata.

Nel caso il sistema (5) rappresenti quote esaustive, la condizione equivalente di additività è data dalla:

(10) $$Y u_m = u_n$$

dove: $u_m$, $u_n$ sono vettori unitari di ordine appropriato.

Sia allora $X^* = (Z, u_n)$ dove, senza perdita di generalità, l'ultima colonna di $X^*$ è un vettore unitario.

<u>Corollario 1</u>:

Sia dato il sistema (5). Se vale la (10) allora lo stimatore (6A) soddisfa la (9).

<u>Dimostrazione</u>:

Analoga al teorema 2 (si veda, ad esempio, Rowe (1977)).

In conclusione, è opportuno menzionare che la validità del teorema precedente è fondata sulla condizione di esatta identificazione del sistema di equazioni considerato, come esplicitato nella sezione seguente.

## 4 - Regressione lineare: ulteriori considerazioni

Si consideri il sistema (4) o (5) soggetto alla (8), riscritto per comodità di seguito:

(4) $y_i = X_i \beta_i + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

(5) $y = X \beta + e$

(8) $Yu = x$

dove $X = \mathrm{diag}(X_i)$. Inoltre, senza perdita di generalità, si supponga che:

$X_i = (Z_i, x) \ \forall i \quad (Z_i$ è di ordine $n \times (k_i - 1))$.

La ripartizione a blocchi di ciascuna $X_i$ evidenzia $x$ come l'ultima colonna, mentre in generale $Z_i \neq Z_j$ anche se alcune colonne possono essere comuni a tutte le $Z_i$, oltre ad $x$. Al massimo vi possono essere $k^* = \min (k_i - 1)$ di queste colonne nel sistema.

Si noti che, mediante sostituzione diretta della (8) nella (4), possiamo riscrivere il sistema simultaneo come:

$$(11) \qquad y_i = Yc_i + Z_i\beta_i^* + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

dove: $c_i = u\gamma_i$

$\beta_i = (\beta_i^{*\prime}, \gamma_i)'$

con $\gamma_i$ scalare e $\beta_i^*$ di dimensione $(k_i - 1) \times 1$. Il sistema (11) può anche essere espresso in forma compatta come:

$$(12) \qquad WA = E$$

dove: $W = (Y, Z)$

Z è la matrice di tutte le variabili esogene del sistema $(n \times k)$ (3).

$A = \begin{pmatrix} C^* \\ -B^* \end{pmatrix}$

$C^*$, $B^*$ sono matrici di coefficienti di appropriate dimensioni (4).

$E = (e_1, \ldots, e_m)$

Nella (12) sono incorporate le usuali restrizioni che vincolano a zero gli elementi di A (e in particolare di $B^*$ ) corrispondenti alle variabili esogene escluse da ciascuna equazione, $k - (k_i - 1)$ e le $m$ restrizioni sui vettori $c_i = u\gamma_i$, che possiamo esprimere simbolicamente come:

$$(12A) \qquad \Phi_i A_i = 0_i \qquad \forall i$$

dove: $\Phi_i$ esprime le restrizioni nella i-esima equazione, di ordine $r$ x$(m + k)$

$0_i$ è un appropriato vettore nullo di ordine $r_i$x 1.

$A_i$ è il vettore di coefficienti della i-esima equazione, di ordine $(m + k)$ x 1.

La (12A) evidenzia come, in generale, il sistema (12) sia sovra identificato in quanto $r_i = m + k - (k_i - 1)$ assicura la validità della condizione di identificazione: $r_i \geq m - 1$ ([5]). Inoltre, è interessante notare che nel caso in cui tutte le variabili Z sono incluse in tutte le equazioni e cioè $k^* = k$, si ottiene un sistema con regressori comuni, discusso nella sezione precedente, che è esattamente identificato.

La discussione precedente dimostra come sia necessario imporre restrizioni sui parametri e, contemporaneamente, considerare in maniera esplicita la struttura globale del modello, affinché sia rispettata la condizione di additività. Infatti, post-moltiplicando per u la (12) si ottiene:

$$WA\,u = E\,u$$

cioè: $x = x\,\gamma' u + ZB^{*}u + Eu$

dove: $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)'$

In questo caso la condizione di additività è assicurata imponendo le restrizioni:

$$(13) \qquad \gamma u = 1 \qquad ZB^{*}u = 0 \qquad Eu = 0$$

L'ultima condizione della (13) stabilisce la dipendenza lineare degli errori del sistema, e quindi la singolarità della matrice di covarianza. In questo caso è frequente nella letteratura il suggerimento di eliminare un'equazione dal sistema, stimare i parametri del sottoinsieme di (m - 1) equazioni ed ottenere la stima della m-esima variabile per differenza ([6]). Alternativamente, nel cosiddetto caso di "identità inesatte" (Kelly, 1975) possono essere disponibili misurazioni indipendenti sia della variabile totale (x) che delle sue componenti ($y_i$), la cui somma può differire dalla x per una discrepanza statistica (un'applicazione concreta è costituita da problemi di allocazione di portafoglio di attività finanziarie). In quest'ottica può non essere accettabile cumulare la discrepanza statistica arbitrariamente con la m-esima variabile eliminata, e si pone il problema del trattamento (asimmetrico) della discrepanza come (m+1)-esima variabile.

Consideriamo un caso speciale di (4), che trova applicazione concreta nella allocazione (lineare) di equazioni di domanda di consumo o di portafoglio (Powell, 1969), che possiamo esprimere come:

$$(14) \qquad y_i = S_i \beta^* + X^* \delta_i + x\eta_i + e_i$$

$$= X_i \beta_i + e_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

dove: $X_i = [S_i, X^*, x]$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \beta^* \\ \delta_i \\ \eta_i \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$(15) \qquad y = X\beta + e$$

dove:

$$X = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & \\ S_2 & \\ \vdots & I_m \otimes (X^*, x) \\ S_m & \end{array}\right] \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta^* \\ \delta_1 \\ \eta_1 \\ \delta_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

L'importanza della (14) come caso speciale di (4) è dato dal fatto che essa è caratterizzata da tre tipi di regressori: un insieme di variabili di effetti specifici alla i-esima equazione, $S_i$ di ordine (n x s ); un insieme comune a tutte le equazioni, $X^*$ di ordine ( n x k); e l'ultima variabile come l'aggregato x. Inoltre, i coefficienti delle variabili specifiche sono comuni (vettore $\beta^*$), mentre i restanti coefficienti sono specifici (vettore $\delta_i$ e scalare $\eta_i$ ). Nell'interpretazione di questa specificazione si pensi dunque ad effetti istituzionali propri della i-esima equazione, ad effetti di prezzi relativi comuni a tutte le equazioni ed infine all'effetto distinto della variabile di scala ([7]).

Imponendo i vincoli:

$$(16) \qquad Yu = x \qquad \sum_{i=1}^{m} S_i = 0$$

alla (15) si ottengono le restrizioni:

$$(17) \qquad \eta' u = 1 \qquad \Delta u = 0 \qquad E u = 0$$

dove $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1, \dots, \delta_m \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} e_i, \dots, e_m \end{bmatrix}$

Si noti come l'ultima restrizione della (17) stabilisca, analogamente alla (13), la dipendenza lineare degli errori del sistema. Anche in questo caso si pone il problema di trattare una matrice di covarianza singolare.

In generale, la discussione precedente pone due ordini di problemi. In primo luogo, dato che il sistema è singolare e sovra identificato, gli stimatori non sono invarianti alla scelta dell'equazione da eliminare, a meno che non si usi un metodo di stima di sistema. In sostanza, vi sono m possibili insiemi di parametri che si possono ottenere eliminando un'equazione, con metodi di stima minimi quadrati, poiché in generale è diverso il contenuto di informazioni della variabile trascurata. In secondo luogo, è importante considerare la struttura del processo che genera gli errori nel sistema, per caratterizzare le proprietà degli stimatori considerati.

Per ragioni di compattezza di esposizione, la trattazione di questi problemi viene affrontata nella sezione successiva riguardante il caso generale di regressione non lineare di sistema.

## 5 - Regressione non lineare

Si consideri il sistema:

$$(18) \qquad y_i = f_i\,(X_i;\,\beta_i) + e_i \qquad\qquad i = 1,\ 2,\ldots,m$$

dove $f_i(\ )$ è, in generale, una funzione non lineare dei parametri, riscritto in forma compatta come:

$$(19) \qquad Y = F(X;\,\beta\,) + E$$

dove: $F(\cdot) = f_1(\cdot),\ldots,f_m(\cdot)$

$E \quad = (e_1,\ldots,e_m)$

soggetto, in generale, alle restrizioni:

$$(20) \qquad g(X,\beta) = 0$$

tale che:

$$(21) \qquad Yu = x \qquad F(X;\beta)u = x \qquad E\,u = 0$$

Ricordando che cov(e) = $\phi$, si avrà dalla (21) che $\phi$ è singolare. Un'ipotesi frequente nella letteratura è costituita dall'indipendenza degli errori di (m-1) equazioni del sistema. In questo caso, il processo di allocazione che discende da ipotesi dettate dalla teoria economica è intrinsecamente asimmetrico, secondo uno schema in cui la variabile residua si determina in funzione degli errori casuali delle precedenti variabili, in rispetto della condizione di additività. Inoltre, nel caso si proceda alla stima con metodi, ad esempio, di equazione singola, rimane il problema dell'arbitrarietà della scelta della m-esima variabile residua e la conseguente non invarianza degli stimatori.

Alternativamente, si può assumere che gli errori del sistema siano interdipendenti, qualora sia plausibile ritenere che un disturbo nell'allocazione di una variabile influenzi anche le decisioni su altre variabili del sistema. In quest'ottica si noti che se si assume, ad esempio, la costanza nel tempo della matrice di covarianza del sistema in cui le variabili sono espresse in livello, ciò non è più vero nel corrispondente sistema specificato secondo quote di bilancio e viceversa. Infatti, denotando con $q_i = w_i y_i$ le quote di bilancio ($\Sigma q_i = 1$) si nota immediatamente che la non costanza nel tempo di $w_i$ introduce eteroschedasticità (8).

In aggiunta, può darsi il caso di autocorrelazione degli errori, qualora la struttura dettata dalla teoria economica non ne tenga esplicitamente conto. Ad esempio, nell'ambito di domanda di beni di consumo, è verosimile ipotizzare autocorrelazione degli errori se ad un dato livello di consumo di un bene al tempo t ci si attende un effetto sul consumo al tempo t+1. Al contrario, nei modelli dinamici e di "habit formation" (9) il problema è esplicitamente considerato nel momento della specificazione teorica del modello.

Formalmente, dato $e_t$ (vettore di errori al tempo t di dimensione m x 1) e $cov(e_t) = \Omega_t$ (matrice singolare di rango m-1), si definiscano escludendo, senza perdita di generalità, l'ultima equazione:

$$e_t^* = (e_{1t} \ldots e_{m-1t})$$

$$cov(e_t^*) = \Omega^*_t$$

La (19) potrà essere riscritta al tempo t con ovvia notazione:

$$(19A) \qquad Y_t = F(X_t; \beta) + e_t$$

Si consideri il caso in cui $\Omega_t = \Omega (\Omega_t^* = \Omega^*)$ $\forall t$.

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza di $e^*$ (corrispondente cioè a m-1 equazioni del sistema (19A)) è dato da:

$$(22) \qquad L(e^*) = k^* - \frac{n}{2} \ln |\Omega^*| - \frac{1}{2} \sum_t e_t^{*'} \Omega^{*-1} e_t^*$$

dove: $k^*$ riassume termini costanti.

Teorema 3:

La massimizzazione della (22) produce stime di massima verosimiglianza ad informazione completa (FIML) del sistema (19) ed è indipendente dall'indice dell'equazione eliminata (Barten, 1969).

Dimostrazione:

Definendo l un vettore (m x 1) nullo con m-esimo elemento uguale ad uno e M = (I - lu' - ul'), e notando che possiamo definire la partizione:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega^* & \Omega_n^{*'} \\ \Omega_n^* & \omega_{nn} \end{bmatrix}$$

si osservi che $\Omega u = 0$ implica:

$$(23A) \quad \begin{pmatrix} \Omega^* \\ \Omega_n^* \end{pmatrix} u = -\Omega l$$

$$(23B) \qquad M \begin{bmatrix} \Omega^* & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} M = \left[ \Omega + \frac{1}{m} uu' \right]$$

$$(23C) \qquad M\begin{bmatrix} e^* \\ o \end{bmatrix} = e$$

Inoltre, il tipico termine nella sommatoria della (22) può esere scritto, sopprimendo l'indice temporale, come:

$$(24) \qquad e^{*'} \; \Omega^{*-1} e^* = \begin{bmatrix} e^{*'} & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega^* & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^* \\ o \end{bmatrix}$$

Si noti dalla (23B) che tutte le matrici sono non singolari, e in particolare:

$$\left[\Omega + \frac{1}{m}uu'\right] \quad \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right) = 1 \quad \left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)$$

$$(25) \qquad \left| \Omega + \frac{1}{m}uu' \right| = |M|^2 \; |\Omega^*| \; \frac{1}{m} = m\,|\Omega^*|$$

Pre - e post - moltiplicando la (23B) per $M^{-1}$ si ottiene l'inversa come:

$$(26) \qquad \begin{bmatrix} \Omega^* & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^{-1} = M \left[\Omega + \frac{1}{m} \, uu'\right]^{-1} M$$

Dalla sostituzione della (26) nella (24), usando (23C) si ottiene:

$$(27) \qquad e^{*'} \Omega^{*-1} e^{*} = e' \left[ \Omega + \frac{1}{m} uu' \right]^{-1} e$$

Infine, usando (27) e (25) si può riscrivere (22) come:

$$(22A) \qquad L = K - \frac{n}{2} \lg \left| \Omega + \frac{1}{m} uu' \right| - \frac{1}{2} \sum_t e'_t \left[ \Omega + \frac{1}{m} uu' \right]^{-1} e_t$$

e quindi le stime FIML sono invarianti rispetto all'equazione eliminata QED.

Corollario 2:

Le conclusioni del teorema 3 si estendono al caso $\Omega_t$ . Per la dimostrazione nell'importante' applicazione pratica di funzioni di spesa si veda Pollak e Wales (1969). Inoltre, si veda Darrough et al. (1983) per un'applicazione nell'ambito del modello "error components".

Si consideri ora il caso in cui vi sia autocorrelazione degli errori. Formalmente il modello è dato dalla

(19A) con incorporate le restrizioni (21) riscritte, per comodità, di seguito come:

$$(28) \qquad Y_t = F(X_t, \beta) + e_t$$

$$(29) \qquad e_t = \tilde{R} e_{t-1} + v_t$$

dove: $\operatorname{cov}(v_t) = \Sigma$

Dato $e_t' u = 0$ si ha dalla (29) che:

$$(30A) \qquad \tilde{R}' u = \lambda$$

$$(30B) \qquad v_t' u = 0$$

$$(30C) \qquad \Sigma \cdot u = 0$$

La (30A) stabilisce che la somma di ogni colonna di $\tilde{R}$ è uguale ad una costante qualsiasi $\lambda$, mentre la (30B) evidenzia la dipendenza lineare di v e quindi la singolarità della matrice di covarianza $\Sigma$ (30C).

Corollario 3:

Le conclusioni del teorema 3 si estendono al caso descritto da (28), (29) e (30). Per la dimostrazione in dettaglio si veda Berndt e Savin (1975) che si basa sulla considerazione che è necessario tenere conto della restrizione (30A) e delle informazioni a priori sulla matrice $\tilde{R}$ per ottenere l'invarianza delle stime rispetto alla equazione eliminata.

Si consideri direttamente (28) e (29) con solo m-1 equazioni. Sotto ipotesi di stazionarietà degli errori, espressa da un'appropriata matrice S, si ha (10):

(31A) $\mathrm{cov}(e_t^*) \equiv \Omega^* = R' \Omega^* R$

(31B) $\mathrm{cov}(e_1^*) \equiv \Omega^* = S' \Sigma^* S$

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza può essere espresso come:

(32A) $$L = k_A + L_1 + L_2$$

dove:

(33A) $$L_1 = \frac{1}{2} \lg |\Omega^* - R'\Omega^* R| - \frac{1}{2} (\lg|\Omega^*| + e_1^{*\prime} \Omega^{*-1} e_1^*)$$

(33B)

$$L_2 = -\frac{n}{2} \lg|\Omega^* - R'\Omega^* R| - \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=2}^{T} (e_t^* - Re_{t-1}^*)' (\Omega^* - R'\Omega^* R)^{-1} (e_t^* - Re_{t-1}^*) \right]$$

La (32A) appare come la formulazione generale del problema in cui si tiene conto esplicitamente del contributo della osservazione al tempo $t = 1$ (Beach e McKinnon, 1979), come appare evidente dal termine $L_1$ espresso dalla (33A). Alternativamente, trascurando l'informazione contenuta al tempo $t = 1$, si ha l'usuale funzione di verosimiglianza:

$$(32B) \qquad L = k_B^* + L_2 + L_3$$

dove: $$L_3 = \frac{1}{2} \lg [ \Omega^* - R' \Omega^* R ]$$

Dal confronto di (32A) e (32B) emergono due osservazioni. Innanzitutto, quest'ultima può essere concentrata rispetto a $\Omega^*$ con evidente risparmio di risorse nella fase della stima (non lineare), al contrario della formulazione generale. La (32A) tuttavia impone esplicitamente la condizione di stazionarietà, come si evince dal fatto che nella (33A) $|\Omega^* - R'\Omega^* R|$ e $|\Omega^*|$ sono vincolate ad assumere lo stesso segno. Ciò è infatti vero se le radici caratteristiche di R sono racchiuse nel cerchio unitario.

Un'applicazione recente di stime FIML e confronto fra i risultati ottenuti dalla (32A) e (32B) è contenuta in Pollak e Wales (1981), mentre è opportuno ricordare che gli approcci di Parks (1967), Hendry (1971) e Chow e Fair (1973) non considerano esplicitamente il problema della stazionarietà. Per ulteriori dettagli si veda anche Judge et al. (1980).

Riguardo alla forma della matrice R che appare nella (31A) è opportuno evidenziare il seguente risultato, espresso nel:

<u>Corollario 4</u>:

Se R nella (31A) è diagonale si ha:

$$(34) \qquad R = \rho I$$

La dimostrazione ( [11] ) discende immediatamente dalla (30A), in quanto vi sono (m-1) restrizioni per riga date dalla diagonalità, in aggiunta alla m-esima restrizione per ogni riga data dalla (30A).

La convenienza di adottare una specificazione del tipo (34) appare evidente nel:

<u>Corollario 5</u>:

Data la 34, la (32A) si può concentrare come:

(32C)

$$L = k_c + \frac{m-1}{2} \lg(1-\rho^2) - \frac{T}{2} \lg \left[ (1-\rho^2) e_1^{*\prime} e_1^{*} + \sum_{t=2}^{T} (e_t^{*} - \rho e_{t-1}^{*})' (e_t^{*} - \rho e_{t-1}^{*}) \right]$$

La dimostrazione si ottiene immediatamente notando che la (31A) diventa

$$(1 - \rho^2)\Omega^* = \Sigma^*$$

ed è quindi possibile risolvere analiticamente la condizione del primo ordine per $\hat{\Sigma}^*$.

## 6 - Osservazioni conclusive

In questa nota sono stati discussi i casi più significativi della stima di sistemi di equazioni soggetti alla condizione di additività, in forma di rassegna sintetica. La sistematizzazione metodologica, concepita nelle sezioni precedenti secondo un ordine crescente di generalità, costituisce dunque un tentativo di offrire una guida allo studioso nella fase di stima empirica.

Nell'ambito della regressione semplice, la sezione 2 ha caratterizzato un meccanismo di allocazione o di ripartizione di un totale nelle sue componenti. Questo caso, ormai di interesse storico nella pratica econometrica, annovera fra i suoi esempi l'importante analisi delle curve di Engel e le condizioni marginali discendenti da una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas (Douglas (1948)).

Nella sezione seguente è stato analizzato un prototipo di modello di allocazione lineare con ipotesi classiche sul processo che genera gli errori, nel caso speciale di regressori comuni. Gli esempi di applicazione sono numerosi nella letteratura. Nel caso di allocazione di portafoglio si vedano, fra i più recenti, Rowe (1977), Taylor e Clements (1983) e per un'applicazione al caso italiano Rovelli (1983).

Inoltre, è interessante la metodologia di Backus e Purvis (1980) dove vi è un confronto con stime miste con informazioni a priori bayesiane. Nel caso di funzioni di produzione, si vedano le stime del modello CES (Arrow et al. (1961)) e delle versioni lineari del modello Translog (Christensen et al. (1973)) e, per l'Italia, Cardani (1983).

Ulteriori aspetti del caso generale di regressione lineare sotto ipotesi classiche sugli errori sono stati messi in luce nella sezione 4. In particolare, sono stati evidenziati i problemi connessi con le condizioni di identificazione di sistema e di dipendenza lineare degli errori del sistema considerato.

Infine, il meccanismo più generale di allocazione di funzioni non lineari e gli associati problemi di efficienza ed invarianza delle stime di massima verosimiglianza sono stati affrontati in quattro casi:

(a) matrice di covarianza contemporanea del sistema costante nel tempo;
(b) matrice di covarianza variabile nel tempo;
(c) autocorrelazione degli errori del sistema con unico coefficiente di correlazione fra le equazioni;
(d) autoregressività vettoriale del sistema di equazioni con ipotesi di stazionarietà.

Nelle applicazioni di questo tipo troviamo, oltre alle stime di Saito (1977) e Roley (1983) di allocazioni di portafoglio, una vasta letteratura di analisi della domanda di beni di consumo per la quale si rimanda alla bibliografia in Pollak e Wales (1980) e Deaton e Muellbauer (1980) e, per applicazioni recenti all'Italia, Bollino (1981) e Rossi (1983).

Inoltre, nell'ambito della teoria della produzione, oltre alle versioni non lineari del modello Translog (Christensen et al. (1983)) e Berndt e Wood (1975) troviamo esempi di stima di forme flessibili (Berndt e Khaled (1979)) e, per l'Italia, Heimler e Milana (1983) e Bosi e Stagni (1984). Infine, riferimenti a modelli di probabilità di transizioni sono contenuti in Judge et al. (1980).

In conclusione, è opportuno sottolineare che in questa sede non sono stati considerati esplicitamente i casi di autocorrelazione di ordine superiore al primo. Inoltre, data la forma di rassegna sintetica, non sono stati discussi gli esempi di uso inappropriato di queste metodologie, di perdita di efficienza ed i casi speciali di equivalenza delle procedure non di massima verosimiglianza che sono state adottate fino ad ora nella letteratura.

# N O T E

(1) Si vedano, ad esempio, Dhrymes (1974), Theil (1971) e Denton (1978).

(2) Si veda, ad esempio, Theil (1971).

(3) Si osservi che la matrice Z definita nella (12) coincide con la matrice Z considerata nel paragrafo 3 se e solo se $Z = Z_i V i$.

(4) In particolare, dato $Z = (Z_i, Z_i^*)$, dove con $Z_i^*$ sono indicate le variabili esogene escluse dalla i-esima equazione, si avrà che la colonna i-esima di $B^*$ sarà $b_i^* = (b_i', \theta')'$ dove $\theta$ è un appropriato vettore nullo, tale che $Z_i^* b_i = Z b_i^*$. Inoltre $C^* = I_m - C$, dove $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

(5) Infatti, in generale, si hanno m restrizioni sui coefficienti $c_i$ oltre alle usuali restrizioni di esclusione di alcune variabili esogene dalla i-esima equazione, in ragione di $(k - (k_i - 1))$. Un riferimento implicito alle condizioni di identificazione in questo caso si trova già in Judge et al.(1980).

(6) Si vedano, fra gli altri, Barten (1968), Parks (1971), Pudney (1980), Pollak e Wales (1980), Bollino (1981), Anderson e Blundell (1982).

(7) Per ulteriori dettagli si rimanda a Powell (1969).

(8) Per una trattazione più estesa si veda, ad esempio, Pollak e Wales (1969), dove il modello viene esteso al caso di "random coefficients".

([9]) Si vedano, ad esempio, Pollak (1970), Phlips (1974), Pollak e Wales (1981, Ray (1982).

([10]) $\Omega$* e $\Sigma$* indicano che si è eliminata una equazione secondo la notazione adottata per la (22). Quindi R ha una riga e una colonna in meno rispetto a R della (29).

([11]) Si vedano Berndt e Savin (1975) e Beach e McKinnon (1979).

# B I B L I O G R A F I A

ALLEN, R. - BOWLEY, A. (1935), Family Expenditure, London.

ANDERSON, G.J. - BLUNDELL, R.W. (1982), Estimation and Hypothesis Testing in Dynamic Singular Equation Systems, "Econometrica", November, vol. 50, p. 1559.

ARROW, K. - CHENERY, H. - MINHAS, B. - SOLOW, R. (1961), Capital Labour Substitution and Economic Efficiency, "Review of Economics and Statistics", August, Vol. 43, p. 225.

BACKUS, D. - PURVIS, D. (1980), An Integrated Model of Household Flow-of-Funds Allocations, "Journal of Money, Credit, and Banking", May, Vol. 12, No. 2, p. 400.

BARTEN, A.P. (1968), Estimating Demand Equations, "Econometrica", April, Vol. 36, p. 213.

__________ (1969), Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations, "European Economic Review", Fall, Vol. 1, p. 7.

BEACH, C. - MCKINNON, J. (1979), Maximum Likelihood Estimation of Singular Equation Systems with Autoregressive Disturbances, "International Economic Review", June, Vol. 20, p. 459.

BERNDT, E. - SAVIN, N. (1975), Estimation and Hypothesis Testing in Singular Equation Systems with Autoregressive Disturbances, "Econometrica", September, Vol. 43, p. 937.

________ - WOOD, D. (1975), Technology, Prices and the Derived Demand for Energy, "Review of Economics and Statistics", August, Vol. LVII, p. 259.

——— - KHALED, M.S. (1979), Parametric Productivity Measurement and Choice àmong Flexible Functional Forms, "Journal of Political Economy", December, Vol. 87, p. 1220.

BOLLINO, C.A. (1981), Domanda di beni di consumo in Italia: una analisi econometrica, "Giornale degli Economisti e Annali di Economia", Marzo, Anno XL, p. 145.

BOSI, P. - STAGNI, A. (1983), Domanda di fattori e sostituibilità nell'industria italiana. Alcuni test dell'ipotesi putty-clay, Convegno S.A.Di.Ba. Banca d'Italia, Perugia, Febbraio.

CARDANI, A.M. (1983), La sostituibilità tra capitale lavoro ed energia nell'industria italiana, in "Ricerche sui modelli per la politica economica" (a cura di B. Sitzia, A. Caprari e M. Orio), No. spec. Contributi alla Ricerca Economica, Banca d'Italia, Vol. I.

CHOW, G. - FAIR, R. (1973), Makimum Likelihood Estimation of Linear Equation Systems with Autoregressive Disturbances, "Annals of Economic and Social Measurement", January, Vol. 2, p. 17.

CHRISTENSEN, L. - JORGENSON, D. (1973), Transcendental Logarithmic Production Frontiers, "Review of Economics and Statistics", February, Vol. LV, p. 28.

DARROUGH, M. - POLLAK, R. - WALES, T. (1983), Dynamic and Stochastic Structure: an Analysis of Three Time Series of Household Budget Studies, "Review of Economics and Statistics, May, Vol.LXV, p. 274.

DEATON, A. - MUELLBAUER, J. (1980), Economics and Consumer Behavior, Cambridge, Cambridge University Press.

DEATON, F. (1978), Single Equation Estimations and Aggregation Restrictions when Equations Have the Same Sets of Regressors, "Journal of Econometrics", October, Vol. 8, p. 173.

DHRYMES, P. (1974), Econometrics, Berlin, Springer V..

DOUGLAS, P. (1948), Are There Laws of Production?, "American Economic Review", March, Vol. 38, p. 1.

HEIMLER, A. - MILANA, C. (1983), Ristrutturazione e domanda dei fattori nell'industria italiana, Ottobre,Roma, Centro Studi Confindustria.

HENDRY, D. (1971), Maximum Likelihood Estimation of Systems of Simultaneous Regression Equations with Errors Generated by a Vector Autoregressive Process, "International Economic Review", June, Vol. 12, p. 257.

JUDGE, G. - GRIFFITHS, W. - HILL, R. - LEE, T. (1980), The Theory and Practice of Econometrics, New York, J. Wiley.

KELLY, J. (1975), Linear Cross-Equation Constraints and the Identification Problem, "Econometrica", Vol. 43, January, p. 125.

PARKS, R. (1967), Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances are Both Serially and Contemporaneously Correlated, "Journal of the American Statistical Association", June, Vol. 62, p. 500.

_________ (1971), Maximum Likelihood Estimation of the Linear Expenditure System, "Journal of the American Statistical Association", December, Vol. 66, p. 900.

PHLIPS, L. (1974), Applied Consumption Analysis, Amsterdam, North-Holland.

POLLAK, R. (1971), Habit Formation and Dynamic Demand Functions, "Journal of Political Economy", July-Aug., Vol. 78, p. 745.

__________ - WALES, T. (1969), Estimation of the Linear Expenditure System, "Econometrica", October, Vol. 37, p. 611.

__________ (1980), Comparison of the Quadratic Expenditure System and Translog Demand Systems with Alternative Specification of Demographic Effects, "Econometrica", Aprile, Vol. 48, p. 595.

__________ (1981), Specification and Estimation of Dynamic Demand Systems, (mimeo).

POWELL, A. (1969), Aitken Estimators as a Tool in Allocating Predetermined Aggregates, "Journal of the American Statistical Association", September, p. 913.

PUDNEY, S. (1980), Disaggregated Demand Analysis: The Estimation of a Class of Non Linear Demand Systems, "Review of Economic Studies", October, Vol. 47, p. 875.

RAY, R. (1982), Specification and Time Series Estimation of Dynamic Gorman Polar Form Demand Systems, June, (mimeo).

ROLEY, V. (1983), Symmetry Restrictions in a System of Financial Asset Demands: Theoretical and Empirical Results, "Review of Economics and Statistics", February, Vol. LXV, p. 124.

ROSSI, N. (1983), Sistemi di domanda condizionali e non: un esperimento disaggregato, in "Ricerche di Economia Applicata: il caso italiano" (a cura di N. Rossi e R. Rovelli), Milano, F. Angeli.

ROVELLI, R. (1983), Un modello del settore bancario: la domanda di attività liquide, 1974-79, in: "Ricerche di economia applicata: il caso italiano" (a cura di N. Rossi e R. Rovelli), Milano, F. Angeli.

ROWE, D. (1977), Financial Flows in the U.S. Non Financial Business Sector, Unpublished PH.D. Dissertation, University of Pennsylvania.

SAITO, M. (1977), Household Flow-of-Funds Equations, "Journal of Money Credit and Banking", Vol. 9, February, p. 1.

TAYLOR, J.C. - CLEMENTS, K.W. (1983), A Simple Portfolio Allocation Model of Financial Wealth, "European Economic Review", Vol. 23, November, p. 241.

THEIL, H. (1971), Principles of Econometrics, New York, J. Wiley.

CENTRO STAMPA BANCA D'ITALIA

TEMI DI DISCUSSIONE RECENTEMENTE PUBBLICATI (*)

n. 19 - Obiettivi e strumenti della vigilanza strutturale: schemi di riferimento e regole ottimali per l'autorizzazione all'apertura di dipendenze bancarie, di G. Lanciotti (giugno 1983)

n. 20 - Dimensioni aziendali, costi ed efficienza nel sistema bancario italiano, di C. Conigliani (giugno 1983)

n. 21 - L'andamento dei profitti bancari rispetto al ciclo economico, di V. Sannucci (giugno 1983)

n. 22 - I conti economici e le situazioni patrimoniali degli istituti di credito speciale: 1975-1981, di D. Franco (giugno 1983)

n. 23 - L'andamento del grado di rischio dell'attività bancaria, di A.M. Giannoni (giugno 1983)

n. 24 - Costi e margini del sistema bancario italiano: un'analisi comparata, di F. Passacantando (giugno 1983)

n. 25 - L'attività internazionale delle banche italiane: informazioni statistiche, di G. Giordano (novembre 1983)

n. 26 - Il reddito da lavoro dipendente nelle indagini campionarie della Banca d'Italia dal 1972 al 1981: evoluzione e determinanti, di R.A. Pirrotta - G. Zen (dicembre 1983)

n. 27 - L'utilizzo dell'analisi discriminatoria per la previsione delle insolvenze: ipotesi e test per un'analisi dinamica, di S. Appetiti (marzo 1984)

n. 28 - La domanda di BOT da parte del pubblico, di E.A. Zautzik (aprile 1984)

n. 29 - Real balances, the exchange rate, and indexation: real variables in disinflation, di S. Fischer (giugno 1984)

n. 30 - Il bilancio pubblico per il quinquennio 1984-88: alcune simulazioni, di G. Morcaldo - G. Salvemini (luglio 1984)

n. 31 - Funzioni aggregate d'investimento, di M. Magnani - R. Valcamonici (agosto 1984)

n. 32 - Un'indagine econometrica sui consumi nazionali (1972-1981), di G. Marotta (agosto 1984)

n. 33 - Short-term interest rate linkages between the United States and Europe, di S. Micossi - T. Padoa-Schioppa (agosto 1984)

(*) I "Temi" pubblicati possono essere richiesti alla Biblioteca del Servizio Studi della Banca d'Italia.