Banche & Banchieri

Spedizione in abb. Post. 45% - art. 2 comma 20/b legge 662/96 – Filiale di Milano

Rivista della Associazione Nazionale
Banche Private

2/2015

ASSBANK

SOMMARIO

Anno XXXXII - N. 2/2015
Rivista trimestrale

Direttore Responsabile
Tancredi Bianchi

Vice Direttore
Mario Comana

Coordinamento editoriale
Simona D'Amico

Progetto grafico
Valeria Fontana

Impaginazione
Valeria Fontana

Redazione, segreteria e servizio abbonamenti
Anna Cardillo
Piazzale Cadorna, 15 - 20123 Milano
Tel. 02 8839271 - fax 02 88392750
segreteria@assbank.it

Sull'"anatocismo" nell'ammortamento francese

Paola Fersini,
Gennaro Olivieri

Il presente lavoro, alla luce di molta recente "letteratura" giuridico-bancaria, cerca di definire in modo rigoroso e completo le caratteristiche, dal punto di vista matematico-finanziario, dell'ammortamento così detto "francese". Si evidenzierà che, poiché la rata dell'ammortamento "francese" è calcolata nel regime finanziario della capitalizzazione composta, ciò comporta, necessariamente, il calcolo di interessi su interessi. A tal fine gli interessi saranno suddivisi in due parti, una riferita agli interessi di ogni periodo e l'altra agli interessi sugli interessi. Sarà presentato il caso in cui, per calcolare la rata costante, si utilizzi il regime finanziario della capitalizzazione semplice ponendo in evidenza che, in tale circostanza, non esiste un solo modo per ripartire la rata in quota interessi e capitale. Ripartire in modo univoco la quota interessi e capitale implica che la rata di qualsiasi ammortamento debba essere calcolata nel regime della capitalizzazione composta.

1. L'AMMORTAMENTO A RATA COSTANTE NEL REGIME FINANZIARIO DELLA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA ("FRANCESE")

È noto che il meccanismo generico, usualmente usato, di rappresentazione di un piano di restituzione di un debito iniziale *A*, contratto all'epoca zero, concesso al tasso periodale i, a rate posticipate prefissate:

$$R_1, R_2, \ldots, R_n \tag{1}$$

si sviluppa con il seguente schema:

Schema 1

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}=A$
1	R_1	$I_1=C^{(0)}i$	$Q_1=R_1-I_1$	$C^{(1)}=C^{(0)}-Q_1$
2	R_2	$I_2=C^{(1)}i$	$Q_2=R_2-I_2$	$C^{(2)}=C^{(1)}-Q_2$
....				
t	R_t	$I_t=C^{(t-1)}i$	$Q_t=R_t-I_t$	$C^{(t)}=C^{(t-1)}-Q_t$
....				
n-1	R_{n-1}	$I_{n-1}=C^{(n-2)}i$	$Q_{n-1}=R_{n-1}-I_{n-1}$	$C^{(n-1)}=C^{(n-2)}-Q_{n-1}$
n	R_n	$I_n=C^{(n-1)}i$	$Q_n=R_n-I_n$	$C^{(n)}=C^{(n-1)}-Q_n=0$

La condizione di equità, in capitalizzazione composta:

$$\sum_{s=1}^{n} R_s v^s = A \tag{2}$$

Paola Fersini: Ricercatore di Matematica Finanziaria alla Luiss Guido Carli
Gennaro Olivieri: Professore di Matematica Finanziaria alla Luiss Guido Carli

assicura la condizione di chiusura:

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s = A \tag{3}$$

e, quindi, $C^{(n)} = 0$.

Nell'ipotesi in cui:

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R = \frac{A}{\sum_{s=1}^{n} v^s} \tag{4}$$

si usa parlare di "ammortamento francese". In questo caso, oltre che con lo SCHEMA 1 sopra riportato, il piano può essere compilato anche con il seguente schema:

SCHEMA 2

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$A=C^{(0)}=R\sum_{s=1}^{n} v^s$
1	R	$I_1=R(1-v^n)=Ri\sum_{s=1}^{n} v^s$	$Q_1=Rv^n$	$C^{(1)}= R\sum_{s=1}^{n-1} v^s$
2	R	$I_2= R(1-v^{n-1})=Ri\sum_{s=1}^{n-1} v^s$	$Q_2= Rv^{n-1}$	$C^{(2)}= R\sum_{s=1}^{n-2} v^s$
....				
t	R	$I_t= R(1-v^{n-t+1})=Ri\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s$	$Q_t= Rv^{n-t+1}$	$C^{(t)}= R\sum_{s=1}^{n-t} v^s$
....				
n-1	R	$I_{n-1}= R(1-v^2)=Ri\sum_{s=1}^{2} v^s$	$Q_{n-1}= Rv^2$	$C^{(n-1)}= R\sum_{s=1}^{1} v^s = Rv$
n	R	$I_n= R(1-v)=Ri\sum_{s=1}^{1} v^s$	$Q_n= Rv$	$C^{(n)}= 0$

La relazione di aggiornamento del debito residuo di un qualsiasi piano di ammortamento è la seguente:

$$\underbrace{C^{(t)}}_{\text{debito residuo in t}} = \underbrace{C^{(t-1)}(1+i)}_{\text{montante di } C^{(t-1)} \text{ in t}} - \underbrace{R_t}_{\text{rata che scade in t}} \quad , \quad t \in \{1,2,\ldots.n\} \tag{5}$$

Tale relazione, nota come equazione ricorrente del debito residuo, prevede che il debito iniziale di importo pari a $A = C^{(0)}$ sia man mano aggiornato fino all'epoca finale in cui ci si aspetta l'azzeramento del debito residuo, cioè $C^{(n)} = 0$.
Il significato finanziario dell'equazione (5) basterebbe da solo a spiegare quello che nel prosieguo di questa nota si cerca di dimostrare con una rigorosa formalizzazione analitica

e un inequivocabile esempio numerico. L'aggiornamento del debito residuo ad ogni scadenza prevede che gli interessi maturati sul debito residuo del periodo precedente vengano incorporati nel debito, che di fatto si aggiorna al valore $C^{(t-1)}(1+i)$, coerentemente al tipico schema della capitalizzazione composta.

2. PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DI *n* PRESTITI ELEMENTARI CON RESTITUZIONE FINALE DEL CAPITALE E DEGLI INTERESSI

Come è noto, il debito inizialmente contratto *A* può essere sostituito (per il principio di composizione dei contratti finanziari) da *n* debiti con pagamento a scadenza, ciascuno, di importo iniziale pari al valore attuale delle successive rate. Ovviamente deve essere mantenuta, com'è in realtà e come è facile verificare, la coerenza con il fenomeno descritto e la sua contabilizzazione in termini di quota capitale e di quota interesse.
Considerando l'asse temporale di ciascuno degli *n* debiti:

1° debito

Rv	R	
0	1	

2° debito

Rv^2		R	
0	1	2	…

…

t° debito

Rv^t				R	
0	1	2	…	t	…

…

(n-1)° debito

Rv^{n-1}						R	
0	1	2	…	t	…	n-1	n

n° debito

Rv^n							R
0	1	2	…	t	…	n-1	n

il debito inizialmente contratto di importo A, ammortizzato con metodo francese pagando *n* rate posticipate pari a *R*, al tasso *i*, viene sostituito dalla somma di *n* debiti (di tipo *Zero Coupon Bond*) rimborsati, ognuno in un'unica soluzione, dopo 1, 2, …, *t*, …, *n* anni, di importo costante *R*.
È evidente che il fenomeno rimane invariato in quanto nel caso di *n* debiti la somma degli importi presi in prestito all'epoca zero coincide con $A=R\sum_{s=1}^{n} v^s$ e i pagamenti a ciascuna delle successive epoche sono esattamente gli stessi previsti nel caso si contraesse un solo debito di importo *A*.
Ciascuno degli *n* debiti precedentemente illustrati può essere rappresentato secondo lo Schema 1 al fine di una corretta contabilizzazione del prestito contratto.
Se consideriamo il generico prestito di importo Rv^t, rimborsato tutto alla scadenza *t* (comprensivo, quindi, degli interessi prodotti) con la somma *R*, la compilazione del piano di ammortamento seguendo lo Schema 1 risulta la seguente:

Schema 3

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}= Rv^t$
1	0	$I_1=Rv^t i$	$Q_1=-Rv^t i$	$C^{(1)}= Rv^t+Rv^t i=Rv^{t-1}$
2	0	$I_2= Rv^{t-1} i$	$Q_2= -Rv^{t-1} i$	$C^{(2)}= Rv^{t-1}+ Rv^{t-1} i=Rv^{t-2}$
….				
s	0	$I_s= Rv^{t-s+1} i$	$Q_s= -Rv^{t-s+1} i$	$C^{(s)}= Rv^{t-s+1}+ Rv^{t-s+1} i=Rv^{t-s}$
….				
t-1	0	$I_{t-1}= Rv^2 i$	$Q_{t-1}= -Rv^2 i$	$C^{(t-1)}= Rv^2+ Rv^2 i=Rv$
t	R	$I_t= Rvi$	$Q_t= Rv$	$C^{(t)}= Rv-Rv=0$

È facile vedere, osservando il piano appena riportato (schema 3), che il calcolo della generica quota di interesse:

$$I_s= Rv^{t-s+1} i \qquad (6)$$

comporta che la determinazione dell'interesse relativo al periodo (*s*-1, *s*) sia effettuato sul debito inizialmente contratto Rv^t aumentato di tutti gli interessi maturati fino all'epoca *s*-1 e, quindi, capitalizzati. D'altro canto non c'era da aspettarsi nulla di diverso avendo calcolato la rata *R* nel regime finanziario della capitalizzazione composta, la cui equità (2) si ripercuote necessariamente sul piano di ammortamento che ne è, semplicemente, un suo sviluppo.

È ovviamente, anche possibile suddividere, nello Schema 3, la quota interesse in due componenti, la componente calcolata sul debito inizialmente contratto [Quota int. (a)] e la componente degli interessi sugli interessi [Quota int. (b)]. Come pure è possibile suddividere anche la quota capitale in due componenti, la parte relativa alla restituzione dell'effettivo debito contratto [Quota capitale (a)], che è 0 fino al tempo *t*-1, e la parte relativa alla capitalizzazione degli interessi maturati ma non pagati [Quota capitale (b)]. È anche possibile esporre, oltre al debito residuo complessivo, anche il debito residuo relativo al solo debito inizialmente contratto senza l'aggiunta degli interessi sugli interessi [Debito Residuo (a)]. Le suddivisioni sono contenute nello Schema 4.

Schema 4

Tempo	Rata	Q. interesse	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. capitale	Q. capitale (a)	Q. capitale (b)	Debito Residuo complessivo	Debito Residuo (a)
0								$C^{(0)}= Rv^t$	$C^{*(0)}= Rv^t$
1	0	$I_1=Rv^t i$	$I_{11}=Rv^t i$	$I_{12}=0$	$Q_1=-Rv^t i$	$Q_{11}=0$	$Q_{12}=-Rv^t i$	$C^{(1)}= Rv^t+Rv^t i=Rv^{t-1}$	$C^{*(1)}= C^{*(0)}-Q_{11}= Rv^t$
2	0	$I_2= Rv^{t-1}i$	$I_{21}=Rv^t i$	$I_{22}=I_1 i= Ri^2\sum_{q=t}^{t} v^q$	$Q_2= -Rv^{t-1}i$	$Q_{21}=0$	$Q_{22}=-Rv^{t-1}i$	$C^{(2)}= Rv^{t-1}+ Rv^{t-1}i=Rv^{t-2}$	$C^{*(2)}= C^{*(1)}-Q_{21}= Rv^t$
3	0	$I_3= Rv^{t-2}i$	$I_{31}=Rv^t i$	$I_{32}=(I_1+ I_2)i=(Rv^t i+ Rv^{t-1}i)i=Ri^2\sum_{q=t-1}^{t} v^q$	$Q_3= -Rv^{t-2}i$	$Q_{31}=0$	$Q_{32}=-Rv^{t-2}i$	$C^{(3)}= Rv^{t-2}+ Rv^{t-2}i=Rv^{t-3}$	$C^{*(3)}= C^{*(2)}-Q_{31}= Rv^t$
....									
s	0	$I_s= Rv^{t-s+1}i$	$I_{s1}=Rv^t i$	$I_{s2}=\sum_{q=1}^{s-1} I_q= Ri^2\sum_{q=t-s+2}^{t} v^q$	$Q_s= -Rv^{t-s+1}i$	$Q_{s1}=0$	$Q_{s2}=-Rv^{t-s+1}i$	$C^{(s)}= Rv^{t-s+1}+ Rv^{t-s+1}i=Rv^{t-s}$	$C^{*(s)}= C^{*(s-1)}-Q_{s1}= Rv^t$
....									
t-1	0	$I_{t-1}= Rv^2 i$	$I_{t-11}=Rv^t i$	$I_{t-12}=\sum_{q=1}^{t-2} I_q= Ri^2\sum_{q=3}^{t} v^q$	$Q_{t-1}= -Rv^2 i$	$Q_{t-11}=0$	$Q_{t-12}=-Rv^2 i$	$C^{(t-1)}= Rv^2+ Rv^2 i=Rv$	$C^{*(t-1)}= C^{*(t-2)}-Q_{t-11}= Rv^t$
t	R	$I_t= Rvi$	$I_{t1}=Rv^t i$	$I_{t2}=\sum_{q=1}^{t-1} I_q= Ri^2\sum_{q=2}^{t} v^q$ (se t=1 allora $I_{t2}=0$)	$Q_t= Rv$	$Q_{t1}=Rv^t$	$Q_{t2}=Rv- Rv^t$	$C^{(t)}= Rv-Rv=0$	$C^{*(t)}= C^{*(t-1)}-Q_{t1}= 0$

È facile far vedere che, alla generica epoca *s*, $I_{s1} + I_{s2} = I_s$, infatti:

$$Rv^t i + Ri^2\sum_{q=t-s+2}^{t} v^q = Rv^{t-s+1}i \quad (7)$$

Osservando lo Schema 4 si evince che gli interessi, ancorché non pagati vanno comunque correttamente calcolati e contabilizzati nel conto economico. Tali interessi, non pagati, vanno ad aumentare il debito residuo e quindi capitalizzati, producono, pertanto, altri interessi per il periodo successivo.

Infatti la differenza tra il debito residuo complessivo e il debito residuo (a), ad ogni scadenza, è dato dal montante, in capitalizzazione composta, degli interessi maturati e non pagati, fino a quella scadenza:

$$C^{(s)} - C^{*(s)} = Rv^{t-s} - Rv^t = Rv^t i\frac{(1+i)^s-1}{i} \quad (8)$$

Se, ora, applichiamo lo schema appena prodotto e commentato a tutti i debiti Rv, Rv^2, …, Rv^t, …, Rv^n nei quali è stato scisso il debito *A* inizialmente contratto e sommiamo per *t* da 1 a *n*, tutti gli elementi in un unico schema ricaviamo:

Schema 5

Tempo	Rata	Q. interesse	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. capitale	Q. capitale (a)	Q. capitale (b)	Debito Residuo	Debito Residuo (a)
0								$C^{(0)}= R\sum_{s=1}^{n} v^s$	$A= \quad C^{(0)}=C^{*(0)}= R\sum_{s=1}^{n} v^s$
1	R	$I_1= Ri\sum_{s=1}^{n} v^s$	$I_{11}=C^{*(0)} i$	$I_{12}=0$	$Q_1=Rv- Ri\sum_{s=2}^{n} v^s$	$Q_{11}=Rv$	$Q_{12}=-R (v^1 - v^n)$	$C^{(1)}= R\sum_{s=1}^{n-1} v^s$	$C^{*(1)}=C^{*(0)}-Rv^1= R\sum_{s=2}^{n} v^s$
2	R	$I_2= Ri\sum_{s=1}^{n-1} v^s$	$I_{21}= C^{*(1)}i$	$I_{22}= Ri^2\sum_{s=2}^{n} \sum_{p=s}^{s} v^p$	$Q_2=Rv- Ri\sum_{s=2}^{n-1} v^s$	$Q_{21}=Rv^2$	$Q_{22} = - R (v^2 - v^{n-1})$	$C^{(2)}= R\sum_{s=1}^{n-2} v^s$	$C^{*(2)}=C^{*(1)}-Rv^2= R\sum_{s=3}^{n} v^s$
3	R	$I_3= Ri\sum_{s=1}^{n-2} v^s$	$I_{31}= C^{*(2)}i$	$I_{32}= Ri^2\sum_{s=3}^{n} \sum_{p=s-1}^{s} v^p$	$Q_3=Rv- Ri\sum_{s=2}^{n-2} v^s$	$Q_{31}=Rv^3$	$Q_{32} = - R (v^3 - v^{n-2})$	$C^{(3)}= R\sum_{s=1}^{n-3} v^s$	$C^{*(3)}=C^{*(2)}-Rv^3= R\sum_{s=4}^{n} v^s$
….									
t	R	$I_t= Ri\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s$	$I_{t1}= C^{*(t-1)}i$	$I_{t2}=Ri^2\sum_{s=t}^{n} \sum_{p=s-(t-2)}^{s} v^p$	$Q_t=Rv- Ri\sum_{s=2}^{n-t+1} v^s$	$Q_{t1}=Rv^t$	$Q_{t2} = - R (v^t - v^{n-t+1})$	$C^{(t)}= R\sum_{s=1}^{n-t} v^s$	$C^{*(t)}=C^{*(t-1)}-Rv^t= R\sum_{s=t+1}^{n} v^s$
….									
n-1	R	$I_{n-1}= Ri\sum_{s=1}^{2} v^s$	$I_{n-11}= C^{*(n-2)}i$	$I_{n-12}=Ri^2\sum_{s=n-1}^{n} \sum_{p=s-(n-3)}^{s} v^p$	$Q_{n-1}=Rv- Ri\sum_{s=2}^{2} v^s$	$Q_{n-11}=Rv^{n-1}$	$Q_{n-12} = - R (v^{n-1} - v^2)$	$C^{(n-1)}= R\sum_{s=1}^{1} v^s$	$C^{*(n-1)}=C^{*(n-2)}-Rv^{n-1}= R\sum_{s=n}^{n} v^s$
n	R	$I_n= Ri\sum_{s=1}^{1} v^s$	$I_{n1}= C^{*(n-1)}i$	$I_{n2}=Ri^2\sum_{s=n}^{n} \sum_{p=s-(n-2)}^{s} v^p$	$Q_n= Rv$	$Q_{n1}=Rv^n$	$Q_{n2} = - R (v^n - v)$	$C^{(n)}= 0$	$C^{*(n)}=C^{*(n-1)}-Rv^n=0$

Nello Schema 5 è facile vedere che:

$$I_t= Ri\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s= Ri\frac{1-v^{n-t+1}}{i} = R(1-v^{n-t+1}) \qquad (9)$$

$$Q_t= Rv- Ri\sum_{s=2}^{n-t+1} v^s = Rv - Riv\frac{1-v^{n-t}}{i} = Rv^{n-t+1} \qquad (10)$$

E che sussiste la relazione:

$$C^{(t)}=C^{(t-1)}- (Rv- Ri\sum_{s=2}^{n-t+1} v^s)=R\sum_{s=1}^{n-t+1} v^s-Rv+Ri \sum_{s=2}^{n-t+1} v^s = R\sum_{s=1}^{n-t} v^s \qquad (11)$$

Le relazioni (9), (10) e (11) sono le stesse sviluppate nel piano di ammortamento francese presentato nello Schema 2.

Pertanto, è possibile affermare che il debito inizialmente contratto di importo *A*, che veniva ammortizzato con metodo francese pagando *n* rate posticipate pari a *R*, al tasso *i*, risulta equivalente alla somma di *n* debiti rimborsati, ognuno in un'unica soluzione, dopo 1, 2, …, *t*, …, *n* anni, di importo costante *R*.

Se è pacifico affermare che esiste questa equivalenza, allora possiamo affermare che il

fenomeno del calcolo degli interessi sugli interessi riguarda sicuramente ciascuno degli *n* debiti, ma riguarda anche l'unico debito di importo iniziale *A* risultando essere la somma degli *n* debiti.
Questa equivalenza e le conseguenti considerazioni che in questa nota sono svolte permettono di mettere in luce che le quote interessi e, conseguentemente, le quote capitali possono essere scisse in modo da mettere in evidenza il fenomeno della capitalizzazione degli interessi e quindi il calcolo degli interessi su interessi già maturati.
Se si volesse, con evidente semplicità, spiegare quello che in questa nota si è descritto si potrebbe osservare che nello Schema 2 le quote capitali ivi indicate:

$$Q_1=Rv^n,\ Q_2= Rv^{n-1},\ \dots,\ Q_t= Rv^{n-t+1},\ \dots,\ Q_{n-1}= Rv^2,\ Q_n= Rv \tag{12}$$

risultano "invertite" rispetto all'effettivo fenomeno, in quanto con ogni rata, la componente di capitale che si rimborsa è pari al suo iniziale valore attuale.
In effetti il debito iniziale *A* viene sostituito da *n* debiti:

$$Rv,\ Rv^2,\ \dots,\ Rv^{n-1},\ Rv^n \tag{13}$$

ognuno scadente tra *1* periodo, *2* periodi, *n*-1 periodi e *n* periodi in cui viene pagata sempre la rata costante *R*.
Il fatto che le quote capitali nell'ammortamento francese siano invece quelle indicate dalla (12), e cioè che la prima sia più piccola del debito che in effetti si rimborsa, sta a significare che la quota interessi che risulta quindi più alta, contiene gli interessi sugli altri debiti che, non pagati, vengono capitalizzati producendo così un interesse sull'interesse.
La stessa cosa vale per la seconda quota capitale e in modo decrescente finché le quote capitali sono minori. Agisce in senso contrario quando le quote capitali sono maggiori.
La successione logica, che ci si aspetterebbe, dovrebbe essere la seguente:

$$Q_1=Rv,\ Q_2= Rv^2,\ \dots,\ Q_t= Rv^t,\ \dots,\ Q_{n-1}= Rv^{n-1},\ Q_n= Rv^n \tag{14}$$

La (14) diventa, di fatto, la (12) in quanto si capitalizzano gli interessi che devono essere contabilizzati su tutte le successive rate e che non vengono pagati periodicamente ma solo al pagamento della corrispondente rata.
La considerazione spesso utilizzata per affermare che nell'ammortamento francese non esiste il fenomeno del calcolo dell'interesse sugli interessi già maturati è che, in ciascun periodo, la quota interessi è calcolata sul debito residuo nell'anno precedente, argomentando che di fatto si 'pagano' gli interessi solo sul capitale ancora da restituire ed escludendo la possibilità di calcolo degli interessi sulla componente di interessi già corrisposta.

Tale affermazione ignora tutte le considerazioni espresse in questa nota e soprattutto il fatto che il debito residuo è funzione della quota capitale che a sua volta dipende dal calcolo della rata costante, che ricordiamo è calcolata nel regime finanziario della capitalizzazione composta.

Non bisogna dimenticare che gli interessi ancorché 'semplici' nell'intervallo temporale, supposto unitario, tra due scadenze successive, finiscono per incorporarsi nel capitale che li ha generati, secondo lo schema tipico della capitalizzazione composta[1].

Il piano di ammortamento francese è un piano a rate prefissate che si suppongono tutte costanti. Il fatto che esista l'equivalenza finanziaria in capitalizzazione composta tra le rate che si versano e il debito inizialmente contratto deve necessariamente permeare tutto il piano di ammortamento e le grandezze che ivi vi compaiono.

Tra l'altro va anche osservato che chi prende a prestito una somma A e si impegna a restituirla mediante n rate costanti R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso i, per far fronte all'impegno di restituzione del prestito, dovrebbe investire la somma A allo stesso tasso i, per lo stesso numero di periodi, nello stesso regime della capitalizzazione composta, e quindi, calcolando anche gli interessi sugli interessi, in modo da poter ottenere a ciascuna successiva scadenza la rata R da versare al creditore e alla fine chiudere l'operazione a pareggio rimanendo con un importo nullo (risulta scontato che chi prende in prestito del denaro, a meno che non sia motivato da altre esigenze, lo fa con la speranza di impiegare il capitale ricevuto a un tasso superiore al tasso di remunerazione del prestito).

In pratica chi investe la somma presa in prestito allo stesso tasso i deve ottenere gli interessi sugli interessi per far fronte all'impegno di restituzione del prestito. È ovvio che in qualche modo, come si è visto, ciò si ripercuote anche sul modo con cui si restituisce tale prestito.

3. PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DI *n* PRESTITI ELEMENTARI CON RESTITUZIONE FINALE DEL CAPITALE E CORRESPONSIONE PERIODICA DEGLI INTERESSI

A supporto del ragionamento sopra esposto, si espone qui di seguito quanto viene riportato nei testi classici di matematica finanziaria, nei quali il debito inizialmente contratto di importo A, ammortizzato con metodo francese pagando n rate posticipate pari a R, al tasso i, viene sostituito, anziché dalla somma di n debiti con restituzione del capitale e degli interessi a un'unica scadenza finale (secondo lo Schema 3 sopra riportato, del tipo

1 "L'antipatia generale che l'ordinamento mostra nei confronti degli interessi composti (divieto di anatocismo: art. 1283 del Codice Civile) viene superata con un pizzico di ipocrisia, cioè facendo salvi gli usi bancari e la volontà delle parti", Bortot *et al.* (1993).

Zero Coupon Bond), dalla somma di *n* debiti ciascuno con rimborso finale del capitale e corresponsione periodica degli interessi (si parla di schema *Bullet Bond*).
In pratica, una volta calcolate le quote capitali secondo lo schema 2, ciascuna di queste rappresenta uno degli *n* debiti contratti il cui schema di restituzione è rappresentato dallo SCHEMA 6 relativo al generico debito di importo Rv^{n-t+1}, rimborsato totalmente all'epoca *t* e con pagamento periodico degli interessi.

SCHEMA 6

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}= Rv^{n-t+1}$
1	$R_1=Rv^{n-t+1}i$	$I_1=Rv^{n-t+1}i$	$Q_1= 0$	$C^{(1)}= Rv^{n-t+1}$
2	$R_2= Rv^{n-t+1}i$	$I_2= Rv^{n-t+1}i$	$Q_2= 0$	$C^{(2)}= Rv^{n-t+1}$
...				
s	$R_s= Rv^{n-t+1}i$	$I_s= Rv^{n-t+1}i$	$Q_s= 0$	$C^{(s)}= Rv^{n-t+1}$
...				
t-1	$R_{t-1}= Rv^{n-t+1}i$	$I_{t-1}= Rv^{n-t+1}i$	$Q_{t-1}= 0$	$C^{(t-1)}= Rv^{n-t+1}$
t	$R_t= Rv^{n-t+1}(1+i)$	$I_t= Rv^{n-t+1}i$	$Q_t= Rv^{n-t+1}$	$C^{(t)}= Rv^{n-t+1}- Rv^{n-t+1}=0$

È facile vedere che se si sommano tutti gli *n* piani relativi a tutte le scadenze *t* tra *1* e *n* compresi, si ricava esattamente lo schema 2.
Inoltre, il principio di composizione dei contratti permette di definire un'operazione finanziaria di *Bullet Bond* di durata *n* (mutuo puro) in termini di *n* operazioni elementari del tipo *Zero Coupon Bond*.
Pertanto, ciascuno degli *n* debiti con restituzione del tipo *Bullet Bond*, può essere scisso in tanti debiti di tipo Zero Coupon Bond quante sono le rate previste.
Quindi, se ad ognuna delle rate:

$$R_1, R_2, \dots, R_t \tag{15}$$

dello SCHEMA 6 si applica tale principio, si può ripercorrere il procedimento di cui allo SCHEMA 3, SCHEMA 4 e SCHEMA 5, verificando facilmente che anche con la modalità di restituzione Bullet Bond esiste un fenomeno di interessi calcolati su interessi già maturati.
L'ammortamento francese, che come in letteratura si riporta, può essere interpretato come la somma di *n Bullet Bond*, contiene, quindi, implicitamente, il calcolo degli interessi su interessi già maturati.
È facile capire che il ragionamento ora presentato permette di inglobare anche l'ammortamento "italiano" (cioè a quote capitali prefissate e costanti) nello schema degli ammor-

tamenti in capitalizzazione composta e quindi con il calcolo degli interessi su gli interessi. Il tutto è, al solito, frutto del regime finanziario della capitalizzazione composta, secondo il quale sono effettuati i calcoli.

4. L'AMMORTAMENTO A RATE COSTANTI NEL REGIME FINANZIARIO DELLA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

È noto che la rata costante, da pagare o riscuotere per *n* periodi unitari, finanziariamente equivalente, in base al tasso per periodo unitario *i*, a un capitale di importo *A*, nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, è data da:

$$R^* = \frac{A}{\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+si}} \tag{16}$$

Ebbene se si applica lo Schema 1 con questa rata R^* è facile constatare che alla scadenza *n* il debito inizialmente contratto non risulta completamente rimborsato. Si riporta lo sviluppo nello Schema 7:

Schema 7

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}=A$
1	R^*	$I_1=C^{(0)}i$	$Q_1=R_1-I_1$	$C^{(1)}=C^{(0)}-Q_1$
2	R^*	$I_2=C^{(1)}i$	$Q_2=R_2-I_2$	$C^{(2)}=C^{(1)}-Q_2$
....				
t	R^*	$I_t=C^{(t-1)}i$	$Q_t=R_t-I_t$	$C^{(t)}=C^{(t-1)}-Q_t$
....				
n-1	R^*	$I_{n-1}=C^{(n-2)}i$	$Q_{n-1}=R_{n-1}-I_{n-1}$	$C^{(n-1)}=C^{(n-2)}-Q_{n-1}$
n	R^*	$I_n=C^{(n-1)}i$	$Q_n=R_n-I_n$	$C^{(n)}=C^{(n-1)}-Q_n>0$

La condizione di equità, in capitalizzazione semplice:

$$R^* \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+si} = A \tag{17}$$

non assicura la condizione di chiusura:

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s = A \tag{18}$$

e, quindi, $C^{(n)} > 0$.

È possibile calcolare, con il procedimento di cui allo Schema 7, il debito residuo a un generico tempo t:

$$C^{(t)} = R^* * \left[(1+i)^t \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+si} - \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k} i^{k-1} \right] \quad (19)$$

da cui si evince che $C^{(n)}$ risulta essere sempre positivo.
È anche possibile evidenziare che, fissato n, esiste un tasso i^*, indipendente da A, per cui $C^{(n)} = A$. Ciò vuol dire, in questo caso specifico, che la rata rimborsa, in ciascuna scadenza, solo la quota interessi e quindi il debito, ove si adotti questo meccanismo, non viene mai restituito diventando di fatto perpetuo.
Assodato che nel regime finanziario della capitalizzazione semplice l'utilizzo dello Schema 7 comporta gravi distorsioni, indaghiamo se può essere utilizzato uno schema consono al regime finanziario utilizzato.
Anche in questo caso il debito inizialmente contratto A può essere sostituito (per il principio di composizione dei contratti finanziari) da n debiti di importo iniziale pari al valore attuale di ognuna delle successive rate. Considerando l'asse temporale di ciascuno degli n debiti:

1° debito

R*/(1+i)	R*	
0	1	

2° debito

R*/(1+2i)		R*	
0	1	2	…

…

t° debito

R*/(1+ti)				R*	
0	1	2	…	t	…

…

(n-1)° debito

R*/[1+(n-1)i]						R*	
0	1	2	…	t	…	n-1	N

n° debito

R*/(1+ni)							R*
0	1	2	…	t	…	n-1	N

il debito inizialmente contratto di importo *A*, che veniva ammortizzato pagando *n* rate posticipate pari a R^*, al tasso *i*, viene sostituito da *n* debiti rimborsati, ognuno in una unica soluzione, dopo 1, 2, …, *t*, …, *n* anni, di importo costante R^*.
È evidente che il fenomeno rimane invariato in quanto si ha che $A = R^* \sum_{s=1}^{n} [1/(1+si)]$ e i pagamenti alle successive scadenze sono gli stessi.
L'utilizzo della legge di capitalizzazione semplice che governa la formazione degli interessi può comportare delle distorsioni nell'attribuzione degli interessi maturati in ogni periodo di riferimento.
Tali problematicità dipendono dal fatto che il regime della capitalizzazione semplice non è una legge scindibile e pertanto non gode di alcune proprietà che sono alla base della costruzione di un piano di ammortamento.
Si può allora ragionare in almeno due modi diversi.
Nel primo modo ragioniamo secondo quanto fatto nello Schema 3 e cioè quello di imputare ad ogni periodo unitario, gli interessi per tale periodo, relativi al debito che risulta ancora non rimborsato.
Si può, quindi, riprodurre, nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, per ogni $t = 1, \ldots, n$, lo Schema 3, che diventa:

Schema 8

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)} = \frac{R^*}{1+it}$
1	0	$I_1 = \frac{R^*}{1+it} i$	$Q_1 = -\frac{R^*}{1+it} i$	$C^{(1)} = \frac{R^*}{1+it} + \frac{R^*}{1+it} i = \frac{R^*}{1+it}(1+i)$
2	0	$I_2 = \frac{R^*}{1+it} i$	$Q_2 = -\frac{R^*}{1+it} i$	$C^{(2)} = \frac{R^*}{1+it}(1+i) + \frac{R^*}{1+it} i = \frac{R^*}{1+it}(1+2i)$
....				
s	0	$I_s = \frac{R^*}{1+it} i$	$Q_s = -\frac{R^*}{1+it} i$	$C^{(s)} = \frac{R^*}{1+it}[1+(s-1)i] + \frac{R^*}{1+it} i = \frac{R^*}{1+it}(1+si)$
....				
t-1	0	$I_{t-1} = \frac{R^*}{1+it} i$	$Q_{t-1} = -\frac{R^*}{1+it} i$	$C^{(t-1)} = \frac{R^*}{1+it}[1+(t-2)i] + \frac{R^*}{1+it} i = \frac{R^*}{1+it}[1+(t-1)i]$
t	R^*	$I_t = \frac{R^*}{1+it} i$	$Q_t = \frac{R^*}{1+it}[1+(t-1)i]$	$C^{(t)} = 0$

Se ora sommiamo tutti i piani per ogni *t*, otteniamo, nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, l'analogo dello Schema 5, senza la suddivisione della quota interessi in interessi e interessi sugli interessi e le sue conseguenze sulle quote capitali e il debito residuo.

SCHEMA 9

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)} = A = R^* \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is}$
1	R^*	$I_1 = R^* i \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_1 = R^*(1 - i \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is})$	$C^{(1)} = (1+i) R^* \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is}$
2	R^*	$I_2 = R^* i \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_2 = R^*(1 - i \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is})$	$C^{(2)} = (1+2i) R^* \sum_{s=3}^{n} \frac{1}{1+is}$
....				
t	R^*	$I_t = R^* i \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_s = R^*(1 - i \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{1+is})$	$C^{(t)} = (1+ti) R^* \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{1+is}$
....				
n-1	R^*	$I_{n-1} = R^* i \sum_{s=n-1}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_{t-1} = R^*(1 - i \sum_{s=n-1}^{n} \frac{1}{1+is})$	$C^{(n-1)} = [1+(n-1)i] R^* \sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is}$
n	R^*	$I_n = R^* i \sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_t = R^*(1 - i \sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is})$	$C^{(n)} = 0$

In questo schema il debito residuo, ad ogni periodo unitario, è la somma delle quote capitali ancora da pagare ma dal secondo periodo in poi non è più la somma dei valori attuali delle rate ancora da pagare. In più, la quota d'interesse non è calcolata secondo la formula generale: $I_t = C^{(t-1)} i$.

Possiamo anche ripercorrere, in capitalizzazione semplice, lo stesso procedimento di cui allo SCHEMA 6, per cui, per ogni *t* possiamo rappresentare il seguente schema:

SCHEMA 10

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)} = \frac{R^*}{1+ti}$
1	$R_1 = \frac{R^*}{1+ti} i$	$I_1 = \frac{R^*}{1+ti} i$	$Q_1 = 0$	$C^{(1)} = \frac{R^*}{1+ti}$
2	$R_2 = \frac{R^*}{1+ti} i$	$I_2 = \frac{R^*}{1+ti} i$	$Q_2 = 0$	$C^{(2)} = \frac{R^*}{1+ti}$
...				
s	$R_s = \frac{R^*}{1+ti} i$	$I_s = \frac{R^*}{1+ti} i$	$Q_s = 0$	$C^{(s)} = \frac{R^*}{1+ti}$
...				
t-1	$R_{t-1} = \frac{R^*}{1+ti} i$	$I_{t-1} = \frac{R^*}{1+ti} i$	$Q_{t-1} = 0$	$C^{(t-1)} = \frac{R^*}{1+ti}$
t	$R_t = \frac{R^*}{1+ti} (1+i)$	$I_t = \frac{R^*}{1+ti} i$	$Q_t = \frac{R^*}{1+ti}$	$C^{(t)} = \frac{R^*}{1+ti} - \frac{R^*}{1+ti} = 0$

Con questo schema, in capitalizzazione semplice, è facile far vedere che la somma delle rate coincide con la rata *R**. Per cui c'è da aspettarsi che sommando insieme per $t = 1, \ldots, n$ i piani che provengono dallo Schema 10 si perde la costanza della rata da pagare per ogni periodo unitario.

Infatti, se ora sommiamo tutti i piani dello Schema 10, per ogni *t*, otteniamo, nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, lo Schema 11:

Schema 11

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is} = A$
1	$R_1 = R^*(\frac{1}{1+i} + i\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is})$	$I_1 = R^* i \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_1 = \frac{R^*}{1+i}$	$C^{(1)} = \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is}$
2	$R_2 = R^*(\frac{1}{1+2i} + i\sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is})$	$I_2 = R^* i \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_2 = \frac{R^*}{1+2i}$	$C^{(2)} = \sum_{s=3}^{n} \frac{1}{1+is}$
…				
t	$R_t = R^*(\frac{1}{1+ti} + i\sum_{s=t}^{n} \frac{1}{1+is})$	$I_t = R^* i \sum_{s=t}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_t = \frac{R^*}{1+ti}$	$C^{(t)} = \sum_{s=t+1}^{n} \frac{1}{1+is}$
…				
n-1	$R_{n-1} = R^*[\frac{1}{1+(n-1)i} + i\sum_{s=n-1}^{n} \frac{1}{1+is}]$	$I_{n-1} = R^* i \sum_{s=n-1}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_{n-1} = \frac{R^*}{1+(n-1)i}$	$C^{(t-1)} = \sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is}$
n	$R_n = R^*(\frac{1}{1+ni} + i\sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is})$	$I_n = R^* i \sum_{s=n}^{n} \frac{1}{1+is}$	$Q_n = \frac{R^*}{1+ni}$	$C^{(t)} = \frac{R^*}{1+ni} - \frac{R^*}{1+ni} = 0$

Anche in questo Schema 11 viene garantito che il debito residuo, ad ogni periodo unitario, è la somma delle quote capitali ancora da pagare ma, anche in questo caso, dal secondo periodo in poi e fino all'(n-2)°, non è più la somma dei valori attuali delle rate ancora da pagare. Però la quota d'interesse è calcolata secondo la formula generale: $I_t = C^{(t-1)} i$. La rata, infine, come accennato è decrescente.

Un altro modo di ripartire gli interessi potrebbe essere quello di imputare, ad ogni periodo, l'interesse totale relativo alla rata che si paga alla fine di quel periodo.

Si ha quindi lo schema, per $t = 1, \ldots n$:

Schema 12

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}=\frac{R^*}{1+ti}$
1	$R_1=0$	$I_1=0$	$Q_1=0$	$C^{(1)}=\frac{R^*}{1+ti}$
2	$R_2=0$	$I_2=0$	$Q_2=0$	$C^{(2)}=\frac{R^*}{1+ti}$
…				
s	$R_s=0$	$I_s=0$	$Q_s=0$	$C^{(s)}=\frac{R^*}{1+ti}$
…				
t-1	$R_{t-1}=0$	$I_{t-1}=0$	$Q_{t-1}=0$	$C^{(t-1)}=\frac{R^*}{1+ti}$
t	$R_t=R^*$	$I_t=R^*-\frac{R^*}{1+ti}$	$Q_t=\frac{R^*}{1+ti}$	$C^{(t)}=\frac{R^*}{1+ti}-\frac{R^*}{1+ti}=0$

Se ora sommiamo tutti i piani dello Schema 12, per ogni *t*, otteniamo lo Schema 13:

Schema 13

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{1+is}$
1	$R_1=R^*$	$I_1=R^*-\frac{R^*}{1+i}$	$Q_1=\frac{R^*}{1+i}$	$C^{(1)}=\sum_{s=2}^{n}\frac{1}{1+is}$
2	$R_2=R^*$	$I_2=R^*-\frac{R^*}{1+2i}$	$Q_2=\frac{R^*}{1+2i}$	$C^{(2)}=\sum_{s=3}^{n}\frac{1}{1+is}$
…				
t	$R_t=R^*$	$I_t=R^*-\frac{R^*}{1+ti}$	$Q_t=\frac{R^*}{1+ti}$	$C^{(t)}=\sum_{s=t+1}^{n}\frac{1}{1+is}$
…				
n-1	$R_{n-1}=R^*$	$I_{n-1}=R^*-\frac{R^*}{1+(n-1)i}$	$Q_{n-1}=\frac{R^*}{1+(n-1)i}$	$C^{(n-1)}=\sum_{s=n}^{n}\frac{1}{1+is}$
n	$R_n=R^*$	$I_n=R^*-\frac{R^*}{1+ni}$	$Q_n=\frac{R^*}{1+ni}$	$C^{(n)}=\frac{R^*}{1+ni}-\frac{R^*}{1+ni}=0$

In questo tipo di ammortamento è violato il principio che i singoli piani nei quali è stato diviso il debito principale seguano uno schema di ammortamento tradizionale (non viene registrata, periodo per periodo, la quota interesse). Vengono garantite le chiusure e il debito residuo è la somma delle quote capitali ancora da versare.

Un ultimo modo può aversi quando gli interessi che sono inglobati nell'ultima rata (la maggiore quantità di interessi) vengono imputati nel primo periodo (poiché si usufruisce della somma maggiore), gli interessi che sono inglobati nella penultima rata nel secondo periodo e così via (in pratica si imputano gli interessi ai vari periodi in modo pressoché analogo a come si fa nel regime finanziario della capitalizzazione composta). Le quote capitali e i successivi debiti residui sono calcolati di conseguenza:

Schema 14

Tempo	Rata	Q. interesse	Q. capitale	Debito Residuo
0				$C^{(0)}=A$
1	R^*	$I_1=\frac{R^*}{1+ni}ni$	$Q_1=\frac{R^*}{1+ni}$	$C^{(1)}=C^{(0)}-Q_1=R^*\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{1+si}$
2	R^*	$I_2=\frac{R^*}{1+(n-1)i}(n-1)i$	$Q_2=\frac{R^*}{1+(n-1)i}$	$C^{(2)}=C^{(1)}-Q_2=R^*\sum_{s=1}^{n-2}\frac{1}{1+si}$
....				
t	R^*	$I_t=\frac{R^*}{1+(n-t+1)i}(n-t+1)i$	$Q_t=\frac{R^*}{1+(n-t+1)i}$	$C^{(t)}=C^{(t-1)}-Q_t=R^*\sum_{s=1}^{n-t}\frac{1}{1+si}$
....				
n-1	R^*	$I_{n-1}=\frac{R^*}{1+2i}2i$	$Q_{n-1}=\frac{R^*}{1+2i}$	$C^{(n-1)}=C^{(n-2)}-Q_{n-1}=R^*\sum_{s=1}^{1}\frac{1}{1+si}$
n	R^*	$I_n=\frac{R^*}{1+i}i$	$Q_n=\frac{R^*}{1+i}$	$C^{(n)}=C^{(n-1)}-Q_n=0$

In questo caso la condizione di chiusura è strutturalmente soddisfatta mentre non viene soddisfatta la caratteristica dell'ammortamento graduale o progressivo secondo la quale la quota interessi è calcolata moltiplicando il debito residuo alla fine dell'anno precedente per il tasso di remunerazione del debito. È facile vedere che tale interesse è inferiore a quello calcolato secondo lo Schema 7.

Questo schema ha, però, il vantaggio che il debito residuo è, ad ogni epoca *t* simultaneamente la somma delle quote capitali ancora da pagare e la somma dei valori attuali delle rate ancora da pagare.

È facile, poi, determinare qual è il tasso i_1 che rende equivalente, in capitalizzazione composta, le rate R^* date dalla (16) e il debito inizialmente contratto *A*:

$$A = R^*\sum_{s=1}^{n} {v_1}^s \tag{20}$$

$$\text{in cui } v_1 = \frac{1}{1+i_1} \tag{21}$$

con, ovviamente:

$$i_1 < i \tag{22}$$

con *i*, tasso periodale, utilizzato nella (4).

Se si volesse contemperare la necessità di redigere un piano di ammortamento che rispetti tutte le caratteristiche descritte all'inizio di questo paragrafo con l'esigenza di evitare il fenomeno del calcolo degli interessi sugli interessi, si potrebbe procedere nel seguente modo:

– fissare il tasso periodale *i* per rimborsare un debito *A* in *n* periodi (tasso contrattuale di mercato);
– determinare la rata R^* nel regime finanziario della capitalizzazione semplice di cui alla (16) che esclude, per costruzione, il calcolo dell'interesse sull'interesse;
– in base alla (20), determinare il tasso i_1 di cui alla (21) (tra l'altro è il TAEG dell'operazione finanziaria, che come è noto presuppone l'uso della capitalizzazione composta) e procedere alla stesura del piano di ammortamento francese, in capitalizzazione composta, secondo questo nuovo tasso.

In questo modo, fermo restando il costo, per il mutuatario, secondo il procedimento della capitalizzazione semplice (i_1 e quindi ridotto rispetto al tasso contrattuale di mercato *i*), si può stendere un piano di ammortamento, in base al tasso i_1, secondo lo schema della capitalizzazione composta e che soddisfi, quindi, tutte le proprietà che discendono dalla scindibilità della legge di valutazione.

È, però, anche facile capire che è possibile avere il tasso periodale contrattuale di mercato *i* in modo tale che, con il procedimento appena esposto, porti al TAEG desiderato.

5. CONCLUSIONI

Per trarre delle conclusioni dalla presente nota si può far riferimento al Tribunale di Torino che, recentemente con la sentenza del 17 settembre 2014, ha affrontato la fondatezza dell'eccezione *ex* art. 1283 c.c. (divieto di anatocismo) riguardo al mutuo con ammortamento "alla francese".

Il giudice monocratico richiama la numerosa recente giurisprudenza pronunciatasi sulla questione (Tribunale Benevento, 19 novembre 2012; Tribunale Milano, 5 maggio 2014; Tribunale Pescara, 10 aprile 2014; Tribunale Siena, 17 luglio 2014) esponendo i motivi per cui la tesi dell'illegittimità non appare fondata:

1. gli interessi di periodo vengono calcolati sul solo capitale residuo;
2. alla scadenza della rata gli interessi maturati non vengono capitalizzati e la quota capitale rimborsata è determinata per differenza rispetto alla quota interessi;

3. visto che la rata paga, oltre agli interessi sul capitale a scadere, una quota del debito in linea capitale, si verifica un fenomeno inverso rispetto alla capitalizzazione.

Ebbene sulla scorta di quanto riportato nella presente nota e dei più comuni testi di matematica finanziaria, si può affermare che un piano di ammortamento a rate posticipate e a tasso costante risulta essere coerente con il fenomeno che va a descrivere se:

- la somma delle quote capitali, alla data di stipula del contratto di mutuo è pari al debito inizialmente contratto;
- la somma dei valori attuali delle rate, sempre alla data di stipula del contratto di mutuo, è pari al debito inizialmente contratto;
- in ogni momento è possibile calcolare il debito residuo in modo:
  - retrospettivo,
  - prospettivo,

  e che in entrambi i casi, il calcolo può essere fatto in modo univoco, dopo aver soddisfatto gli impegni da soddisfare in quella data, mediante:
  - le quote capitali,
  - le rate;
- la quota interessi è data dal debito residuo alla fine del periodo precedente moltiplicato per il tasso di interesse periodale;
- la rata è data dalla somma della quota di interessi e della quota capitale;
- il debito residuo alla fine di un certo periodo, successivo al periodo iniziale, è dato dal debito residuo alla fine del periodo precedente meno la quota capitale del periodo considerato;
- il debito residuo alla fine di un certo periodo, successivo al periodo iniziale, è dato dal debito residuo alla fine del periodo precedente, capitalizzato per un periodo, meno la rata del periodo considerato;
- sia possibile identificare in modo univoco e noto anche alle terze parti, ai fini contabili, la quota interessi da imputare a conto economico e la quota capitale che interessa lo stato patrimoniale.

Tutte e otto le condizioni sopra riportate devono essere simultaneamente soddisfatte. C'è da osservare che alcune di esse possano essere identificate come dipendenti da alcune altre, ma nell'analisi effettuata ciò non rileva.

Da quanto illustrato nella presente nota risulta chiaro che, solo quando si adotti il regime finanziario della capitalizzazione composta, il piano di ammortamento che si ricava soddisfa tutte le condizioni sopra riportate. Ove si adotti, ad esempio, il regime finanziario della capitalizzazione semplice ciò non può, strutturalmente, accadere.

Il tutto deriva dalla proprietà della scindibilità delle leggi finanziarie di cui gode la legge della capitalizzazione composta (unica a goderne nell'ambito delle leggi che dipendono dalla sola durata dell'operazione finanziaria).

La scindibilità di una legge finanziaria risiede in una proprietà che può essere descritta nel seguente modo.
In una contrattazione, due parti fissano la somma disponibile all'epoca iniziale e il montante che sarà disponibile alla scadenza dell'operazione.
Il montante sarà calcolato in base a un certo tasso di interesse, secondo una determinata legge finanziaria di capitalizzazione.
Se previsto, il contratto potrebbe essere rescisso ad ogni epoca intermedia, tra quella iniziale e la scadenza.
In qualsiasi epoca intermedia si richiede che il montante, a quell'epoca della somma iniziale, e il valore attuale della somma finale, entrambi calcolati allo stesso tasso di interesse contrattuale, coincidano. Ciò ai fini di stabilire in modo inequivocabile i termini e le condizioni di interruzione dell'operazione.
Ebbene ciò accade se e solo se la legge finanziaria con cui vengono effettuati i calcoli è la legge della capitalizzazione composta.
Quanto sopra sta a significare che non è possibile calcolare, ad esempio nell'ammortamento francese, la rata utilizzando la capitalizzazione composta e pretendere di non accettare che siano verificate tutte le condizioni che ciò comporta.
Il piano di ammortamento è la descrizione dettagliata del fenomeno finanziario che sta dietro l'operazione effettuata e quindi rispecchia le caratteristiche del fenomeno che come già detto, nell'ammortamento francese, segue la legge finanziaria della capitalizzazione composta.
Quando si afferma che nell'ammortamento francese non esiste il fenomeno del calcolo dell'interesse sugli interessi già maturati e che in ciascun periodo la quota interessi è calcolata sul debito residuo dell'anno precedente, argomentando che di fatto si 'pagano' gli interessi solo sul capitale ancora da restituire ed escludendo la possibilità di calcolo degli interessi sulla componente di interessi già corrisposta, si ignorano tutte le considerazioni fatte in questa nota e soprattutto il fatto che il debito residuo è funzione della quota capitale che, a sua volta, dipende dal calcolo della rata costante, che ricordiamo è calcolata nel regime finanziario della capitalizzazione composta.
Lo Schema 5 di questa nota mette in luce, in modo inequivocabile, la scomposizione della quota interessi, nelle due componenti: interesse di competenza e interesse sugli interessi.
Infine, come si è già detto, va osservato che chi prende a prestito una somma A e si impegna a restituirla mediante n rate costanti R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso i, se volesse rendersi neutro rispetto all'operazione effettuata, dovrebbe investire la somma A allo stesso tasso i, per lo stesso numero di periodi calcolando anche gli interessi sugli interessi, in modo da poter ottenere, alle successive scadenze, le rate R da versare al creditore e alla fine rimanere con un importo nullo.
In pratica chi investe la somma presa in prestito allo stesso tasso i deve ottenere gli inte-

ressi sugli interessi per far fronte all'impegno di restituzione del prestito. In caso contrario non ci riuscirebbe. È ovvio che in qualche modo ciò corrisponde alla modalità con cui si restituisce tale prestito.
Come ultima osservazione e in riferimento a quanto detto, si può ribadire che il tasso di interesse costante utilizzato per calcolare la rata nell'ammortamento francese nel regime finanziario della capitalizzazione composta risulta essere il TAEG dell'operazione stessa calcolato secondo le modalità suggerite da Banca d'Italia e in uso. Come è noto, il TAEG è un indice sintetico del costo, dalla parte del mutuatario, di un'operazione finanziaria noto e dichiarato a tutti gli attori dell'operazione al momento della stipula.
Il fatto che nel piano di ammortamento ci sia un fenomeno di calcolo dell'interesse sull'interesse non implica un aumento del costo dell'operazione stessa che rimane uguale al TAEG stabilito all'inizio dell'operazione. Il calcolo degli interessi sugli interessi è solo un mezzo tecnico perché vengano soddisfatte tutte le proprietà di cui si è discusso in questo lavoro.
Infine vale la pena ricordare che tutte le operazioni finanziarie esistenti sul mercato (investimenti in fondi comuni, piani pensionistici, polizze assicurative, prodotti derivati, ecc.) sono valutati e trattati utilizzando la legge della capitalizzazione composta e quindi considerando il fenomeno degli interessi sugli interessi che, alla luce di alcune interpretazioni legali, non dovrebbe, quindi, essere consentito.

APPENDICE – ESEMPI NUMERICI

In riferimento a un prestito di 100.000,00 euro da rimborsarsi a rate costanti in 5 anni al tasso d'interesse annuo del 10% si presentano qui le elaborazioni secondo gli schemi esposti in questa nota.
Nello schema seguente è rappresentato il piano di ammortamento progressivo a rata costante.

Schema 1 e Schema 2

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

Nel successivo Schema 3 il debito inizialmente contratto di importo pari a 100.000 euro, ammortizzato con metodo francese pagando cinque rate posticipate pari a 26.379,75, viene sostituito dalla somma di cinque debiti (di tipo Zero Coupon Bond) rimborsati, ognuno in una unica soluzione, dopo 1, 2, 3, 4 e 5 anni, di importo costante pari a 26.379,75.

Schema 3 – 1° anno

s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	23.981,59
1	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 3 – 2° anno

s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	21.801,44
1	-	2.180,14	– 2.180,14	23.981,59
2	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 3 – 3° anno

s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	19.819,50
1	-	1.981,95	– 1.981,95	21.801,44
2	-	2.180,14	– 2.180,14	23.981,59
3	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 3 – 4° anno

s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	18.017,72
1	-	1.801,77	– 1.801,77	19.819,50
2	-	1.981,95	– 1.981,95	21.801,44
3	-	2.180,14	– 2.180,14	23.981,59
4	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-
5	-	-	-	-

Schema 3 – 5° anno

s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	16.379,75
1	-	1.637,97	– 1.637,97	18.017,72
2	-	1.801,77	– 1.801,77	19.819,50
3	-	1.981,95	– 1.981,95	21.801,44
4	-	2.180,14	– 2.180,14	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

Se per ciascuna "cella" si sommano i valori contenuti nei precedenti Schemi 3, si ottiene lo schema:

Totale Schema 3 anni 1-5

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

Lo Schema 4 permette, per ciascuno dei cinque debiti rappresentati negli Schemi 3, di suddividere la quota interessi e la quota capitale nelle due componenti così come specificato nella nota.
Lo Schema 5 è il risultato della somma dei cinque schemi 4 precedenti.

Schema 4 – 1° anno

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	23.981,59	23.981,59
1	26.379,75	2.398,16	-	2.398,16	23.981,59	23.981,59	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – 2° anno

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	21.801,44	21.801,44
1	-	2.180,14	-	2.180,14	– 2.180,14	-	– 2.180,14	23.981,59	21.801,44
2	26.379,75	2.180,14	218,01	2.398,16	23.981,59	21.801,44	2.180,14	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – 3° anno

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	19.819,50	19.819,50
1	-	1.981,95	-	1.981,95	– 1.981,95	-	– 1.981,95	21.801,44	19.819,50
2	-	1.981,95	198,19	2.180,14	– 2.180,14	-	– 2.180,14	23.981,59	19.819,50
3	26.379,75	1.981,95	416,21	2.398,16	23.981,59	19.819,50	4.162,09	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – 4° anno

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	18.017,72	18.017,72
1	-	1.801,77	-	1.801,77	– 1.801,77	-	– 1.801,77	19.819,50	18.017,72
2	-	1.801,77	180,18	1.981,95	– 1.981,95	-	– 1.981,95	21.801,44	18.017,72
3	-	1.801,77	378,37	2.180,14	– 2.180,14	-	– 2.180,14	23.981,59	18.017,72
4	26.379,75	1.801,77	596,39	2.398,16	23.981,59	18.017,72	5.963,87	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – 5° anno

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
1	-	1.637,97	-	1.637,97	– 1.637,97	-	– 1.637,97	18.017,72	16.379,75
2	-	1.637,97	163,80	1.801,77	– 1.801,77	-	– 1.801,77	19.819,50	16.379,75
3	-	1.637,97	343,97	1.981,95	– 1.981,95	-	– 1.981,95	21.801,44	16.379,75
4	-	1.637,97	542,17	2.180,14	–2.180,14	-	– 2.180,14	23.981,59	16.379,75
5	26.379,75	1.637,97	760,18	2.398,16	23.981,59	16.379,75	7.601,84	-	-

Schema 5

s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	100.000,00	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	-	10.000,00	16.379,75	23.981,59	– 7.601,84	83.620,25	76.018,41
2	26.379,75	7.601,84	760,18	8.362,03	18.017,72	21.801,44	– 3.783,72	65.602,53	54.216,97
3	26.379,75	5.421,70	1.138,56	6.560,25	19.819,50	19.819,50	-	45.783,03	34.397,47
4	26.379,75	3.439,75	1.138,56	4.578,30	21.801,44	18.017,72	3.783,72	23.981,59	16.379,75
5	26.379,75	1.637,97	760,18	2.398,16	23.981,59	16.379,75	7.601,84	-	-

I successivi schemi 6, rappresentano ciascuno, ognuno dei cinque debiti in cui è stato scisso il debito iniziale, con rimborso finale del capitale e corresponsione periodica degli interessi. L'ultimo schema (Schema 6 – totale) rappresenta la somma dei cinque piani relativi a tutte le scadenze tra 1 e 5 (si noti che corrisponde esattamente allo Schema 2).

Schema 6 – 1° anno

	s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
Piano 1	0	-	-	-	16.379,75
	1	18.017,72	1.637,97	16.379,75	-
	2	-	-	-	-
	3	-	-	-	-
	4	-	-	-	-
	5	-	-	-	-

Schema 6 – 2° anno

	s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
Piano 2	0	-	-	-	18.017,72
	1	1.801,77	1.801,77	-	18.017,72
	2	19.819,50	1.801,77	18.017,72	-
	3	-	-	-	-
	4	-	-	-	-
	5	-	-	-	-

Schema 6 – 3° anno

	s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
Piano 3	0	-	-	-	19.819,50
	1	1.981,95	1.981,95	-	19.819,50
	2	1.981,95	1.981,95	-	19.819,50
	3	21.801,44	1.981,95	19.819,50	-
	4	-	-	-	-
	5	-	-	-	-

Schema 6 – 4° anno

	s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
Piano 4	0	-	-	-	21.801,44
	1	2.180,14	2.180,14	-	21.801,44
	2	2.180,14	2.180,14	-	21.801,44
	3	2.180,14	2.180,14	-	21.801,44
	4	23.981,59	2.180,14	21.801,44	-
	5	-	-	-	-

Schema 6 – 5° anno

	s	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
Piano 5	0	-	-	-	23.981,59
	1	2.398,16	2.398,16	-	23.981,59
	2	2.398,16	2.398,16	-	23.981,59
	3	2.398,16	2.398,16	-	23.981,59
	4	2.398,16	2.398,16	-	23.981,59
	5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

SCHEMA 6 – TOTALE

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	-

Inoltre, se ognuno dei cinque debiti con restituzione del tipo *Bullet Bond*, rappresentati nello SCHEMA 6, viene scisso in tanti debiti di tipo *Zero Coupon Bond* quante sono le rate previste in ciascuno (seguendo lo SCHEMA 4), otteniamo i seguenti schemi:

SCHEMA 4 – PIANO 1

Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
1	1	1	18.017,72	1.637,97	-	1.637,97	16.379,75	16.379,75	-	-	-
1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

SCHEMA 4 – PIANO 2

Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
2	1	0	-	-	-	-	-	-	-	1.637,97	1.637,97
2	1	1	1.801,77	163,80	-	163,80	1.637,97	1.637,97	-	-	-
2	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
2	2	0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
2	2	1	-	1.637,97	-	1.637,97	– 1.637,97	-	– 1.637,97	18.017,72	16.379,75
2	2	2	19.819,50	1.637,97	163,80	1.801,77	18.017,72	16.379,75	1.637,97	-	-
2	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – Piano 3

Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
3	1	0	-	-	-	-	-	-	-	1.801,77	1.801,77
3	1	1	1.981,95	180,18	-	180,18	1.801,77	1.801,77	-	-	-
3	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	1	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
3	2	0	-	-	-	-	-	-	-	1.637,97	1.637,97
3	2	1	-	163,80	-	163,80	– 163,80	-	– 163,80	1.801,77	1.637,97
3	2	2	1.981,95	163,80	16,38	180,18	1.801,77	1.637,97	163,80	-	-
3	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
3	3	0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
3	3	1	-	1.637,97	-	1.637,97	– 1.637,97	-	– 1.637,97	18.017,72	16.379,75
3	3	2	-	1.637,97	163,80	1.801,77	– 1.801,77	-	– 1.801,77	19.819,50	16.379,75
3	3	3	21.801,44	1.637,97	343,97	1.981,95	19.819,50	16.379,75	3.439,75	-	-
3	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

SCHEMA 4 – PIANO 4

Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
4	1	0	-	-	-	-	-	-	-	1.981,95	1.981,95
4	1	1	2.180,14	198,19	-	198,19	1.981,95	1.981,95	-	-	-
4	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
4	2	0	-	-	-	-	-	-	-	1.801,77	1.801,77
4	2	1	-	180,18	-	180,18	– 180,18	-	– 180,18	1.981,95	1.801,77
4	2	2	2.180,14	180,18	18,02	198,19	1.981,95	1.801,77	180,18	-	-
4	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
4	3	0	-	-	-	-	-	-	-	1.637,97	1.637,97
4	3	1	-	163,80	-	163,80	– 163,80	-	– 163,80	1.801,77	1.637,97
4	3	2	-	163,80	16,38	180,18	– 180,18	-	– 180,18	1.981,95	1.637,97
4	3	3	2.180,14	163,80	34,40	198,19	1.981,95	1.637,97	343,97	-	-
4	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
4	4	0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
4	4	1	-	1.637,97	-	1.637,97	– 1.637,97	-	– 1.637,97	18.017,72	16.379,75
4	4	2	-	1.637,97	163,80	1.801,77	– 1.801,77	-	– 1.801,77	19.819,50	16.379,75
4	4	3	-	1.637,97	343,97	1.981,95	– 1.981,95	-	– 1.981,95	21.801,44	16.379,75
4	4	4	23.981,59	1.637,97	542,17	2.180,14	21.801,44	16.379,75	5.421,70	-	-
4	4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Schema 4 – Piano 5

Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
5	1	0	-	-	-	-	-	-	-	2.180,14	2.180,14
5	1	1	2.398,16	218,01	-	218,01	2.180,14	2.180,14	-	-	-
5	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	1	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
5	2	0	-	-	-	-	-	-	-	1.981,95	1.981,95
5	2	1	-	198,19	-	198,19	– 198,19	-	– 198,19	2.180,14	1.981,95
5	2	2	2.398,16	198,19	19,82	218,01	2.180,14	1.981,95	198,19	-	-
5	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	2	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
5	3	0	-	-	-	-	-	-	-	1.801,77	1.801,77
5	3	1	-	180,18	-	180,18	– 180,18	-	– 180,18	1.981,95	1.801,77
5	3	2	-	180,18	18,02	198,19	– 198,19	-	– 198,19	2.180,14	1.801,77
5	3	3	2.398,16	180,18	37,84	218,01	2.180,14	1.801,77	378,37	-	-
5	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
5	4	0	-	-	-	-	-	-	-	1.637,97	1.637,97
5	4	1	-	163,80	-	163,80	– 163,80	-	– 163,80	1.801,77	1.637,97
5	4	2	-	163,80	16,38	180,18	– 180,18	-	– 180,18	1.981,95	1.637,97
5	4	3	-	163,80	34,40	198,19	– 198,19	-	– 198,19	2.180,14	1.637,97
5	4	4	2.398,16	163,80	54,22	218,01	2.180,14	1.637,97	542,17	-	-
5	4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Piano	t	s	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
5	5	0	-	-	-	-	-	-	-	16.379,75	16.379,75
5	5	1	-	1.637,97	-	1.637,97	– 1.637,97	-	– 1.637,97	18.017,72	16.379,75
5	5	2	-	1.637,97	163,80	1.801,77	– 1.801,77	-	– 1.801,77	19.819,50	16.379,75
5	5	3	-	1.637,97	343,97	1.981,95	– 1.981,95	-	– 1.981,95	21.801,44	16.379,75
5	5	4	-	1.637,97	542,17	2.180,14	– 2.180,14	-	– 2.180,14	23.981,59	16.379,75
5	5	5	26.379,75	1.637,97	760,18	2.398,16	23.981,59	16.379,75	7.601,84	-	-

Lo schema seguente è la somma degli schemi 4 applicati a ciascuno dei cinque debiti (con restituzione *Bullet Bond*) rappresentati negli schemi 6.

Totale Piani 1-5 (Schema 5)

t	Rata	Quota int. (a)	Quota int. (b)	Q. interesse	Q. cap.	Q. cap. (a)	Q. cap. (b)	Deb. Res. compl.	Deb. Res. (a)
0	-	-	-	-	-	-	-	100.000,00	100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	-	10.000,00	16.379,75	23.981,59	– 7.601,84	83.620,25	76.018,41
2	26.379,75	7.601,84	760,18	8.362,03	18.017,72	21.801,44	– 3.783,72	65.602,53	54.216,97
3	26.379,75	5.421,70	1.138,56	6.560,25	19.819,50	19.819,50	-	45.783,03	34.397,47
4	26.379,75	3.439,75	1.138,56	4.578,30	21.801,44	18.017,72	3.783,72	23.981,59	16.379,75
5	26.379,75	1.637,97	760,18	2.398,16	23.981,59	16.379,75	7.601,84	-	-

Questo schema coincide ancora una volta allo Schema 2, e si dimostra, quindi che anche con modalità di restituzione *Bullet Bond* esiste il fenomeno degli interessi sugli interessi.
Lo Schema 7 rappresenta lo sviluppo del piano di ammortamento nel caso di rata costante e utilizzo del regime della capitalizzazione semplice.

Schema 7

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	25.689,72	10.000,00	15.689,72	84.310,28
2	25.689,72	8.431,03	17.258,69	67.051,58
3	25.689,72	6.705,16	18.984,56	48.067,02
4	25.689,72	4.806,70	20.883,02	27.184,00
5	25.689,72	2.718,40	22.971,32	4.212,68

Come si può notare in $t = 5$ il debito inizialmente contratto non risulta completamente rimborsato.
Se sostituiamo al debito di 100.000 euro i cinque debiti di importo iniziale pari al valore attuale di ognuna delle rate successive, abbiamo la rappresentazione contenuta negli schemi 8 (imputiamo ad ogni periodo gli interessi relativi al debito che risulta ancora da rimborsare).

Schema 8 – 1° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	23.354,29
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 8 – 2° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	21.408,10
1	-	2.140,81	– 2.140,81	23.548,91
2	25.689,72	2.140,81	23.548,91	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 8 – 3° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	19.761,32
1	-	1.976,13	– 1.976,13	21.737,46
2	-	1.976,13	– 1.976,13	23.713,59
3	25.689,72	1.976,13	23.713,59	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 8 – 4° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	18.349,80
1	-	1.834,98	– 1.834,98	20.184,78
2	-	1.834,98	– 1.834,98	22.019,76
3	-	1.834,98	– 1.834,98	23.854,74
4	25.689,72	1.834,98	23.854,74	-
5	-	-	-	-

Schema 8 – 5° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	17.126,48
1	-	1.712,65	– 1.712,65	18.839,13
2	-	1.712,65	– 1.712,65	20.551,78
3	-	1.712,65	– 1.712,65	22.264,43
4	-	1.712,65	– 1.712,65	23.977,07
5	25.689,72	1.712,65	23.977,07	-

Lo Schema 9 rappresenta la somma dei cinque piani sviluppati nel regime della capitalizzazione semplice.

Schema 9

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	25.689,72	10.000,00	15.689,72	84.310,28
2	25.689,72	7.664,57	18.025,15	66.285,13
3	25.689,72	5.523,76	20.165,96	46.119,17
4	25.689,72	3.547,63	22.142,09	23.977,07
5	25.689,72	1.712,65	23.977,07	-

Nello Schema 9, dal secondo periodo in poi, il debito residuo non è la somma dei valori attuali delle rate ancora da corrispondere.
Nei successivi schemi 10 viene suddiviso il debito inizialmente contratto in cinque prestiti elementari con restituzione finale del capitale e corresponsione periodica degli interessi. Si ripercorre, quindi, in capitalizzazione semplice, lo stesso Schema 6 prodotto in capitalizzazione composta.

Schema 10 – 1° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	23.354,29
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 10 – 2° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	21.408,10
1	2.140,81	2.140,81	-	21.408,10
2	23.548,91	2.140,81	21.408,10	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 10 – 3° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	19.761,32
1	1.976,13	1.976,13	-	19.761,32
2	1.976,13	1.976,13	-	19.761,32
3	21.737,46	1.976,13	19.761,32	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 10 – 4° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	18.349,80
1	1.834,98	1.834,98	-	18.349,80
2	1.834,98	1.834,98	-	18.349,80
3	1.834,98	1.834,98	-	18.349,80
4	20.184,78	1.834,98	18.349,80	-
5	-	-	-	-

Schema 10 – 5° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	17.126,48
1	1.712,65	1.712,65	-	17.126,48
2	1.712,65	1.712,65	-	17.126,48
3	1.712,65	1.712,65	-	17.126,48
4	1.712,65	1.712,65	-	17.126,48
5	18.839,13	1.712,65	17.126,48	-

Sommando tutti i piani dello Schema 10, per ogni *t*, otteniamo nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, il seguente Schema 11:

Schema 11

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	33.354,29	10.000,00	23.354,29	76.645,71
2	29.072,67	7.664,57	21.408,10	55.237,61
3	25.285,08	5.523,76	19.761,32	35.476,28
4	21.897,43	3.547,63	18.349,80	17.126,48
5	18.839,13	1.712,65	17.126,48	-

Si può osservare che viene meno la costanza della rata ed inoltre, anche in questo caso, il debito residuo, dal secondo periodo in poi e fino all'epoca 3 non è la somma dei valori attuali delle rate ancora da corrispondere.
Se si imputa ad ogni periodo l'interesse totale relativo alla rata che si paga alla fine di quel periodo, per ciascuna epoca t = 1, 2, 3, 4 e 5, si ottiene lo Schema 12:

Schema 12 – 1° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	23.354,29
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	-
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 12 – 2° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	21.408,10
1	-	-	-	21.408,10
2	25.689,72	4.281,62	21.408,10	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 12 – 3° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	19.761,32
1	-	-	-	19.761,32
2	-	-	-	19.761,32
3	25.689,72	5.928,40	19.761,32	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-

Schema 12 – 4° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	18.349,80
1	-	-	-	18.349,80
2	-	-	-	18.349,80
3	-	-	-	18.349,80
4	25.689,72	7.339,92	18.349,80	-
5	-	-	-	-

Schema 12 – 5° anno

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	17.126,48
1	-	-	-	17.126,48
2	-	-	-	17.126,48
3	-	-	-	17.126,48
4	-	-	-	17.126,48
5	25.689,72	8.563,24	17.126,48	-

Se sommiamo tutti i piani dello Schema 12, per ogni epoca, otteniamo lo Schema 13:

Schema 13

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	76.645,71
2	25.689,72	4.281,62	21.408,10	55.237,61
3	25.689,72	5.928,40	19.761,32	35.476,28
4	25.689,72	7.339,92	18.349,80	17.126,48
5	25.689,72	8.563,24	17.126,48	-

Si ribadisce che con questa impostazione nei singoli piani contenuti negli schemi 12 non viene registrata per ciascun periodo la quota interesse, contravvenendo alla logica di chiarezza contabile di un tradizionale schema di ammortamento.
Lo Schema 14, sviluppa un piano di ammortamento invertendo l'ordine delle quote interessi indicate nello Schema 13, in modo che possano essere imputati maggiori interessi in corrispondenza dell'utilizzo di una somma maggiore.

Schema 14

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0	-	-	-	100.000,00
1	25.689,72	8.563,24	17.126,48	82.873,52
2	25.689,72	7.339,92	18.349,80	64.523,72
3	25.689,72	5.928,40	19.761,32	44.762,39
4	25.689,72	4.281,62	21.408,10	23.354,29
5	25.689,72	2.335,43	23.354,29	-

Nello Schema 14, il debito residuo è dato ad ogni epoca dalla somma delle quote capitali da pagare (condizione soddisfatta anche dall'approccio presentato nello Schema 9, 11 e 13) e dalla somma dei valori attuali delle rate ancora da corrispondere, mentre cade la proprietà che la quota interessi è calcolata moltiplicando il debito residuo dell'anno precedente per il tasso contrattuale.
Nella Tabella 1 è determinato il TAEG (calcolato in capitalizzazione composta!) di un finanziamento rimborsato a rate costanti (calcolate nel regime dell'interesse semplice, al tasso di interesse contrattuale del 10% e secondo la (16)).

Tabella 1

tasso i_1 =	8,9707%
0	100.000,00
1	– 25.689,72
2	– 25.689,72
3	– 25.689,72
4	– 25.689,72
5	– 25.689,72

Utilizzando il tasso i_1 possiamo, quindi, redigere il piano di ammortamento secondo il regime della capitalizzazione composta esposto nella Tabella 2.

TABELLA 2

t	Rata	Q. interessi	Q. capitale	Debito Residuo
0				100.000,00
1	25.689,72	8.970,73	16.718,99	83.281,01
2	25.689,72	7.470,91	18.218,81	65.062,20
3	25.689,72	5.836,55	19.853,17	45.209,03
4	25.689,72	4.055,58	21.634,14	23.574,88
5	25.689,72	2.114,84	23.574,88	-

Risulta evidente che si prende in prestito la somma di 100.000,00 euro al tasso di interesse del 10% annuo per 5 anni e si calcola la rata, in base a questo tasso, secondo il regime finanziario della Capitalizzazione Semplice (secondo la (16), l'importo di tale rata è di 25.689,72 euro. Ciò corrisponde ad un TAEG dell'8,9707% che è il costo effettivo dell'operazione secondo gli standard internazionali e di Banca d'Italia. È in base a questo tasso, quindi, che deve essere compilato il piano di ammortamento francese secondo lo SCHEMA 2. Piano che contiene interessi su interessi in base al tasso dell'8,9707%, senza però alterarne il costo per il mutuatario, misurato da tale tasso. In questo caso il 10% non rappresenta un indice di costo per il mutuatario.
Di converso, è anche possibile calcolare il tasso i_2 che rende la rata R^* (data dalla (16)) uguale alla rata R data dalla (4) e pari a 26.379,75 euro. Nell'esempio qui riportato tale tasso risulta pari a all'11,2723%.
Questo significa che, fermo restando la rata costante calcolata nel regime della capitalizzazione composta, data dalla (4), (al tasso del 10%) se si volesse ottenere la stessa rata nel regime della capitalizzazione semplice, secondo la (16), dovrei utilizzare un tasso pari all'11,2723% che non rappresenta, come detto, un indice di costo per il mutuatario.
Di fatto, quindi, se si utilizza questo tasso, appunto nella (16), si ottiene la rata di euro 26.379,75, che porta il TAEG al 10% (che è il vero costo per il mutuatario.
Ciò significa che se il mercato ritenesse che il tasso di costo dell'operazione finanziaria di mutuo remunerativo fosse del 10% e una legge imponesse di calcolare la rata secondo la capitalizzazione semplice (utilizzando la (16)), allora il mercato dovrebbe utilizzare un tasso dell'11,2723% in modo che il costo per il mutuatario rimanga del 10% e quindi, come detto, remunerativo per chi eroga il mutuo.

BIBLIOGRAFIA

Bonferroni C.E. (1937), *Fondamenti di Matematica Attuariale*, Appunti Anno Accademico 1936-1937.

Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F.A., Torrigiani M. (1993), *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editore, Bologna.

Cacciafesta F. (2001), *Lezioni di Matematica Finanziaria classica e moderna*, G. Giappichelli Editore, Torino.

Levi E. (1964), *Corso di matematica finanziaria e attuariale*, Giuffre Editore, Milano.

Olivieri G. (1978), *Alcune considerazioni di un teorema sulla unicità del tasso interno di rendimento di progetti di investimento o di finanziamento*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, nn. 1-2, Roma.

Ottaviani G. (1991), *Lezioni di matematica finanziaria*, Editoriale Veschi, Roma.

SENTENZE

Tribunale di Bari n. 113 del 28.10.2008
Tribunale di Benevento n. 1936 del 19.11.2012
Tribunale di Larino n. 119 del 3.05.2012
Tribunale di Milano n. 5733 del 5.05.2014
Tribunale di Pescara del 10.04.2014
Tribunale di Siena del 17.07.2014
Tribunale di Torino n. 5984 del 17.09.2014

Rivista della Associazione Nazionale
Banche Private

ABBONAMENTI 2015

Inviare copia del presente modulo via FAX al numero 02-883927.50 o via E-MAIL a segreteria@assbank.it

☐ Desidero ricevere una copia saggio di Banche e Banchieri

☐ Desidero sottoscrivere un abbonamento a Banche e Banchieri

- ☐ Ordinario: € 70
- ☐ Estero: € 75
- ☐ Sostenitore: € 150
- ☐ Arretrati: € 20 (specificare numero e anno) ....

Forma di pagamento

☐ Assegno bancario o circolare "non trasferibile" intestato a Editrice Minerva Bancaria Srl, Roma (P. Iva 10158450154)

☐ Bonifico bancario IBAN – IT 94U 03500 03205 000 0000 36725 intestato a Editrice Minerva Bancaria Srl, Roma (P. Iva 10158450154)

NOTA BENE: L'abbonamento sarà attivato solo al momento del ricevimento dell'intero importo dovuto

DATI PER SPEDIZIONE RIVISTA

ENTE ....

NOME E COGNOME ....

QUALIFICA ....

INDIRIZZO .... CAP ....

CITTÀ .... PROV ....

TEL .... FAX .... E-MAIL ....

DATI PER FATTURAZIONE

ENTE ....

NOME E COGNOME ....

INDIRIZZO .... CAP ....

CITTÀ .... PROV ....

P.IVA O CODICE FISCALE ....

DATA .... TIMBRO/FIRMA ....

Ai sensi della legge 675/96 il richiedente è informato che i dati da lui forniti sono oggetto di trattamento da parte di ASSBANK, Piazzale Cadorna, 15, Milano, e di EMB Srl per le finalità e il tempo necessari al soddisfacimento della richiesta formulata.

EDITORE
EMB - Editrice Minerva Bancaria Srl
Largo Luigi Antonelli, 27
00145 Roma

STAMPA
NEW PRINT FARM
Roma

Registrazione presso il Tribunale di Milano
n. 424 del 15 novembre 1973
Spedizione in abbonamento postale
45% - art. 2, comma 20/b – legge 662/96