BANCA D'ITALIA
EUROSISTEMA

CONCORSO PER L'ASSUNZIONE DI 20 ASSISTENTI
CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE STATISTICHE
(Bando 25/01/2021 – Lett. C)

Testo n.2

STATISTICA DESCRITTIVA

Un quesito a scelta tra i due proposti dalla Commissione.

QUESITO N. 1

La candidata/il candidato:

1. data la seguente distribuzione percentuale dei redditi familiari:

Classe di reddito (euro)	Percentuale di famiglie	Percentuale di reddito
0-15.000	20	6
15.000-25.000	35	19
25.000-40.000	20	26
40.000-50.000	10	16
50.000-60.000	10	10
60.000-100.000	4	16
100.000-500.000	1	7

   a. sulla base della sola conoscenza della distribuzione percentuale di famiglie per classe di reddito:
      i. calcoli il reddito medio familiare nell'ipotesi di ripartizione uniforme delle frequenze all'interno di ciascuna classe e indichi in quale classe di reddito è posizionata la mediana;
      ii. indichi quali informazioni è possibile dedurre sulla forma della distribuzione dei redditi dal confronto tra la media e la classe mediana.

   b. Tenendo conto anche della percentuale di reddito detenuta da ciascuna classe, illustri i passi per la costruzione della curva di Lorenz ed espliciti la relazione esistente tra tale rappresentazione grafica e il rapporto di concentrazione di Gini (senza calcolarlo);

2. definisca il concetto di distribuzione simmetrica. Sia γ l'indice di asimmetria di Fisher, ne riporti la formula e discuta se $\gamma=0$ è condizione necessaria e sufficiente per la simmetria di una distribuzione.

QUESITO N. 2

La candidata/il candidato:

1. date le seguenti risposte, raccolte tramite questionario, sui valori dell'affitto mensile pagato da 20 famiglie residenti in un condominio:

   1.200; 1.500; 2.000; 3.000; 2.500; 1.900; 2.100; 2.100; 1.600; 30.000; 2.200; 1.900; 2.000; 1.000; 2.000; 2.100; 1.100; 1.200; 2.000; 1.500.

   a. costruisca la distribuzione di frequenze relative cumulate degli affitti rilevati;
   b. spieghi quale indice di posizione e di variabilità ritiene sia più appropriato utilizzare per rappresentare questa distribuzione;

2. considerando che alle stesse famiglie è stato chiesto di riportare anche il numero di auto possedute e che le risposte sono raggruppate separatamente per le famiglie residenti nella palazzina A e nella palazzina B del condominio, secondo la seguente distribuzione doppia di frequenze assolute:

Numero di auto	Palazzina A	Palazzina B
1	7	2
2	3	8

   a. calcoli la distribuzione doppia delle frequenze relative e verifichi se, sulla base di queste evidenze, il numero di macchine in possesso delle famiglie è indipendente dalla palazzina di residenza;
   b. sapendo che la distribuzione tra numero di macchine in possesso delle famiglie e palazzina di residenza condizionatamente alla dimensione del nucleo familiare è la seguente, indichi quale conclusione è possibile trarre rispetto al risultato del punto precedente.

Famiglie di 2 persone

Numero di auto	Palazzina A	Palazzina B
1	7	2
2	0	0

Famiglie di 4 persone

Numero di auto	Palazzina A	Palazzina B
1	0	0
2	3	8

PROBABILITÀ E INFERENZA STATISTICA

Un quesito a scelta tra i due proposti dalla Commissione.

QUESITO N.3

1. Si consideri l'esperimento dato da tre estrazioni casuali da un'urna contenente sei palline bianche e quattro nere. La candidata/il candidato calcoli:
   a. la probabilità di estrarre tre palline bianche nel caso in cui le estrazioni avvengano con reinserimento;
   b. la probabilità di estrarre tre palline bianche nel caso in cui le estrazioni avvengano senza reinserimento;

c. la probabilità di estrarre una pallina bianca e due nere (qualsiasi sia l'ordine) nel caso in cui le estrazioni avvengano senza reinserimento.

2. Si assuma che in una fabbrica che produce zaini la probabilità che uno zaino venga prodotto privo di difetti sia pari a 0,9. Si denoti con X la variabile aleatoria che assume valore 1 se uno zaino viene prodotto privo di difetti e valore 0 se presenta difetti. La candidata/il candidato:

   a. suggerisca una distribuzione di probabilità nota che rappresenti la variabile X, e ne determini il valore atteso, la moda e la varianza;

   b. fornisca una spiegazione del concetto di asimmetria e curtosi di una generica distribuzione di probabilità e indichi se la distribuzione della variabile X di cui al punto a è simmetrica;

   c. ipotizzando che vengano prodotti durante un turno 10 zaini e che la probabilità che ciascuno zaino sia prodotto senza difetti sia pari a 0,9 (indipendentemente dalla produzione degli altri zaini), suggerisca una distribuzione di probabilità per la variabile aleatoria data dal numero di zaini prodotti senza difetti in un turno e mostri come calcolare la probabilità che 8 zaini vengano prodotti senza difetti in un turno (senza svolgere i calcoli);

   d. ipotizzando che la fabbrica produca un numero *n* di zaini con *n* molto grande, e di voler calcolare la probabilità che gli zaini prodotti senza difetti siano un certo numero, proponga un modo di procedere che utilizzi il teorema del limite centrale (si può trascurare l'eventuale correzione per asimmetria) e spieghi brevemente l'importanza della generalizzazione del teorema del limite centrale.

QUESITO N.4

1. Sia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un campione casuale semplice estratto da una variabile casuale X con funzione di densità:

$$f(x;\lambda) \overset{\propto}{\cancel{=}} \frac{x}{\frac{2}{3}\lambda^2} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

   per $x > 0$ e $\lambda > 0$.

   La candidata/il candidato:

   a. definisca la funzione di massima verosimiglianza e la funzione di log-verosimiglianza;
   b. calcoli la stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$ per λ;
   c. definisca in generale il concetto di stimatore efficiente e stabilisca in quali condizioni lo stimatore $\hat{\lambda}$, di cui al punto b, è il più efficiente.

2. La candidata/il candidato spieghi in cosa consiste il metodo dei momenti.

3. Sia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un campione casuale semplice estratto da una variabile casuale X con media $2\lambda + 5$. La candidata/il candidato calcoli lo stimatore $\hat{\lambda}$ per λ basato sul metodo dei momenti e determini se $\hat{\lambda}$ è distorto.

MATEMATICA

Un quesito a scelta tra i due proposti dalla Commissione.

QUESITO N.5

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$$

La candidata/il candidato svolga i punti di seguito elencati, illustrando e motivando il procedimento seguito.

1. Determini il dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
2. determini gli intervalli di monotonia crescente e decrescente e gli eventuali estremi di f(x), ossia i punti di massimo, minimo e flesso;
3. tracci un grafico di f(x);
4. calcoli l'area sottesa al grafico della funzione f(x) sull'asse x nell'intervallo [0,1].

QUESITO N.6

La candidata/il candidato svolga i punti di seguito elencati, illustrando e motivando il procedimento seguito.

1. Calcoli la derivata della seguente funzione, indicando le regole di derivazione utilizzate nello svolgimento (ad esempio somma, prodotto, quoziente, funzione reciproca, funzione inversa, catena, potenza).

$$x\cos(x)$$

2. Risolva il seguente integrale di Riemann.

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

3. Risolva il sistema lineare crameriano, calcolando la matrice inversa della matrice incompleta e fornendo la soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 4x + 4y + z = -2 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

4. Determini, se esistono, i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché la seguente serie abbia somma pari a $\frac{1}{3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$$

5. Determini per quali valori del parametro k il seguente sistema è determinato, ossia ammette soluzioni.

$$\begin{cases} x - 2y - z = k \\ x - y - 3kz = 0 \\ kx + (k-1)y - z = k \end{cases}$$

PROVA IN LINGUA INGLESE

Henry Ford said; 'Anyone who stops learning is old, whether at twenty or eighty. Anyone who keeps learning stays young.'Do you agree? Why?