

CONCORSO PER L'ASSUNZIONE DI 5 ESPERTI LAUREATI
CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE STATISTICHE
(Bando 15/09/2020 – Lett. B)

Testo n. 1

STATISTICA E PROBABILITÀ

Due quesiti a scelta tra tre proposti dalla Commissione

QUESITO N. 1

Si supponga che la variabile aleatoria (v.a.) X con *funzione di ripartizione*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0$$

rappresenti la durata di vita aleatoria di una macchina.

1. Si calcoli la *probabilità di sopravvivenza* della macchina al tempo a , ossia la probabilità che essa sia ancora funzionante passato un tempo a dall'inizio del funzionamento. Si dimostri, inoltre, che la durata di vita aleatoria della macchina è caratterizzata da *assenza di usura (o memoria)*, ossia supponendo la macchina sia ancora funzionante dopo un tempo a , la *vita residua* ($X_a = X - a$) abbia la stessa distribuzione della durata di vita iniziale X .
2. Si calcoli la media e la varianza della v.a. X e si illustrino le relazioni tra la v.a. X e la famiglia di distribuzioni Gamma.
3. Si illustri una variabile aleatoria *discreta* anch'essa caratterizzata dall'assenza di memoria, per cui vale $P(Y = a + k | Y > a) = P(Y = k)$.

QUESITO N. 2

Si consideri una popolazione di N imprese indipendenti operanti in un dato settore. Sia $p, 0 \leq p \leq 1$, il rischio che ogni impresa possa andare incontro a una riduzione nel numero di clienti.



1. La candidata/il candidato illustri mediante quale distribuzione di probabilità stimerebbe che un dato numero $k \leq N$ di imprese possa subire una riduzione nel numero di clienti. Calcoli la funzione generatrice dei momenti, la media e la varianza di tale distribuzione di probabilità al variare di k .
2. Si vuole sottoporre a verifica l'ipotesi che il rischio p sia pari a 0,6 contro l'ipotesi alternativa $p = 0,4$ basandosi su un campione casuale di 20 imprese tra le N . Si illustri i concetti di errore di prima e seconda specie. Si definisca la probabilità dell'errore di prima specie, la probabilità dell'errore di seconda specie e la potenza del test, supponendo di aver fissato come soglia di accettazione del test una riduzione del numero di clienti per almeno 12 imprese tra le 20 del campione.
3. Si supponga che tra le 20 imprese del campione si sia alla fine osservato che esattamente 12 hanno registrato una riduzione del numero di clienti. Si costruisca un intervallo di confidenza al 95 per cento per la stima di p . Si illustri la strategia nel caso che il campione iniziale fosse stato invece di 1.000 imprese.

QUESITO N. 3

Sia data la seguente distribuzione di 700 individui per fasce di reddito annuo e titolo di studio conseguito.

Titolo di studio conseguito	Reddito annuo in migliaia di euro				Totale
	[0-25)	[25 -45)	[45 -100)	>=100	
Licenza elementare	117	57	32	1	207
Licenza media	105	41	2	2	150
Laurea	21	85	38	36	180
Dottorato/Scuola di specializzazione	1	49	59	54	163
Totale	244	232	131	93	700

La candidata/il candidato:

1. verifichi se il reddito medio annuo varia a seconda del titolo di studio conseguito;
2. illustri – senza necessariamente effettuare i calcoli - i passi da compiere per determinare il grado di dipendenza in media della variabile “Reddito annuo in migliaia di euro”;
3. indichi quale condizione deve essere soddisfatta per poter affermare che la variabile “Reddito annuo in migliaia di euro” sia perfettamente dipendente in media dalla variabile “Titolo di studio conseguito” e cosa implichi questa circostanza.



ECONOMETRIA E STATISTICAL LEARNING

Un quesito a scelta tra due proposti dalla Commissione

QUESITO N. 4

1. Nei modelli lineari generalizzati il valore atteso della variabile risposta y è legato al predittore lineare $\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}$ dalla funzione *link* $g(\cdot)$ che descrive il legame tra il valore atteso della variabile risposta $E(y_i|\eta_i)$ e il predittore lineare η_i .

La candidata/il candidato:

- 1.a derivi il modello di regressione lineare come caso speciale del modello lineare generalizzato di cui sopra, esplicitando la funzione *link*;
- 1.b illustri la procedura di stima dei parametri del modello di regressione lineare e le ipotesi sugli errori. Inoltre discuta (senza dimostrarle) le conseguenze che si avrebbero se venissero violate le ipotesi sugli errori.
2. Si supponga di aver stimato un modello di regressione lineare su un campione di 546 case unifamiliari al fine di studiare la variazione del prezzo delle abitazioni stesse in funzione delle dimensioni del lotto di terreno su cui sono state costruite. Sono state inserite nel modello alcune variabili di controllo.

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.19812	0.23570	30.540	<2e-16 ***
log(lot.size)	0.40893	0.02837	14.413	<2e-16 ***
air.cond	0.22161	0.02416	9.173	<2e-16 ***
n.bath	0.25541	0.02208	11.569	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

dove:

- la variabile risposta rappresenta il prezzo della casa unifamiliare espresso in logaritmo;
- "log(lot.size)" è una variabile numerica che rappresenta la dimensione del lotto del terreno (in log) su cui la casa è stata costruita;
- "air.cond" è una variabile binaria che assume valore 1 se la casa è dotata di aria condizionata e 0 altrimenti;
- "n.bath" è una variabile numerica che indica il numero di bagni presenti nella casa.

La candidata/il candidato:



- 2.a interpreti la relazione tra prezzo delle case unifamiliari e dimensione del lotto del terreno su cui l'abitazione è costruita;
- 2.b interpreti come la presenza o meno di aria condizionata e il numero di bagni presenti nell'abitazione si relazionano con il prezzo delle case unifamiliari.
3. Si consideri un effetto interattivo tra un predittore continuo x_1 e un predittore binario x_2 in un modello di regressione. La candidata/il candidato illustri come interpreterebbe l'effetto marginale del predittore x_1 sulla variabile risposta.

QUESITO N. 5

Si supponga che il processo stocastico Y_t segua il seguente modello AR(1):

$$Y_t = 4 + 0.2Y_{t-1} + a_t, \quad \text{dove} \quad a_t \sim WN(0,1)$$

La candidata/il candidato:

1. stimi la media del processo e la sua funzione di autocorrelazione;
2. scriva in forma esplicita il modello MA(q) sufficiente a rappresentare il modello AR(1) considerato, assumendo $Y_0 = 0$ e approssimando i calcoli alla terza cifra decimale;
3. fornisca il previsore di Y_t h passi in avanti ($F_{t,h}$), che abbia errore di previsione con media nulla e varianza minima.

METODI DI CAMPIONAMENTO

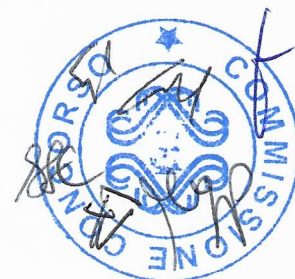
Un quesito a scelta tra due proposti dalla Commissione

QUESITO N. 6

Si è interessati a conoscere il prezzo al grammo dell'oro prodotto da 100 aziende. A tale scopo viene condotta un'indagine mensile su un campione di 5 aziende.

Nella tavola che segue sono riportati i prezzi al grammo dell'oro rilevati nei mesi di marzo e aprile e le rispettive medie e varianze campionarie.

Mese	Azienda					Media campionaria	Varianza campionaria
	1	2	3	4	5		
marzo	58,2	53,3	57,6	59,8	62,0	58,2	8,3
aprile	58,9	53,4	59,2	60,5	62,0	58,8	8,5



Si ipotizzi sia stato adottato uno dei due seguenti metodi di campionamento:

Metodo n. 1. Si seleziona un campione casuale semplice senza reintroduzione di 5 aziende a marzo e uno di 5 aziende ad aprile, in modo tale che i due campioni siano completamente indipendenti;

Metodo n. 2. Si seleziona un campione casuale semplice senza reintroduzione di 5 aziende a marzo e si utilizza lo stesso campione anche ad aprile.

1. Si stimi:

a) la variazione assoluta del prezzo medio al grammo dell'oro tra marzo e aprile;

b) il prezzo medio al grammo nel bimestre marzo-aprile.

Si confronti l'efficienza degli stimatori tra i due metodi di campionamento illustrati sopra per i parametri a) e b) e si commentino i risultati.

2. Si descriva il campionamento con panel ruotato; si discuta la relazione tra la percentuale ottimale di sovrapposizione del campione e la correlazione dei valori tra edizioni successive dell'indagine.

3. Si illustrino sinteticamente i problemi che derivano dalla mancata partecipazione di alcune unità selezionate nel campione, anche con specifico riferimento al metodo di campionamento n. 2, e si descrivano le possibili soluzioni.

QUESITO N. 7

Nell'ambito di una indagine socio-demografica si vuole stimare la proporzione di individui che sono andati a votare all'ultima elezione in una popolazione di 1.000 individui ripartiti in 3 regioni. Studi precedenti hanno mostrato che la partecipazione al voto varia tra le regioni. Si decide di adottare un disegno di campionamento stratificato con allocazione proporzionale di numerosità totale pari a 100 individui. La tabella mostra la popolazione per regione e il totale campionario degli individui che hanno risposto di aver votato.

Regione	Numero di individui nella popolazione	Totale campionario degli individui che hanno votato
1	300	15
2	500	30
3	200	5

1. Si stimi la proporzione degli individui che hanno votato e la sua varianza. Si calcoli, inoltre, l'effetto del disegno e si commentino i risultati.



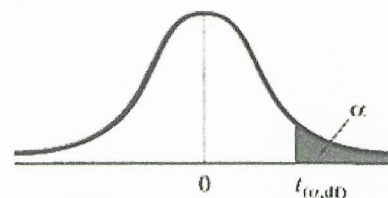
2. Ipotizzando di conoscere a priori la varianza della partecipazione al voto nella popolazione per ciascuna regione, si descriva l'allocazione di Neyman e la si confronti con l'allocazione proporzionale.
3. Si immagini che alcuni partecipanti all'indagine non rispondano alla domanda sulla partecipazione al voto. Quali sarebbero le conseguenze sulla stima della proporzione degli individui che hanno votato?

PROVA IN LINGUA INGLESE

In your opinion, for effective management of the Covid-19 crisis, what economic and health factors need to be considered before re-opening all public services, shops, restaurants, theatres, and other places of entertainment?



Tavola della distribuzione T di Student



Gradi di libertà	Area nella coda di destra								
	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	1.309	1.696	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	1.309	1.694	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	1.308	1.692	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	1.307	1.691	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	1.306	1.688	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	1.305	1.687	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	1.304	1.686	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	1.304	1.685	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
41	1.303	1.683	2.020	2.121	2.421	2.701	2.967	3.301	3.544
42	1.302	1.682	2.018	2.120	2.418	2.698	2.963	3.296	3.538
43	1.302	1.681	2.017	2.118	2.416	2.695	2.959	3.291	3.532
44	1.301	1.680	2.015	2.116	2.414	2.692	2.956	3.286	3.526
45	1.301	1.679	2.014	2.115	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520
46	1.300	1.679	2.013	2.114	2.410	2.687	2.949	3.277	3.515
47	1.300	1.678	2.012	2.112	2.408	2.685	2.946	3.273	3.510
48	1.299	1.677	2.011	2.111	2.407	2.682	2.943	3.269	3.505
49	1.299	1.677	2.010	2.110	2.405	2.680	2.940	3.265	3.500
50	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496



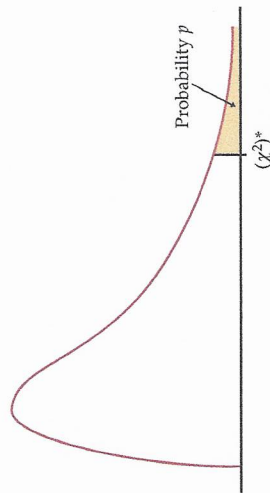


Figure 10.1 shows a graph of the probability density function p versus χ^2 . The curve is bell-shaped and centered at $(\chi^2)^*$. The area under the curve to the right of $(\chi^2)^*$ is shaded yellow and labeled "Probability p " with an arrow.

TABLE F χ^2 distribution critical values

df	Tail probability p											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83	12.12
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82	15.20
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27	17.73
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47	20.00
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.51	22.11
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.54	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46	24.12
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32	26.02
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12	27.87
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88	29.67
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59	31.42
11	13.70	14.63	15.77	17.28	19.68	21.92	22.62	24.72	26.76	28.73	31.26	33.14
12	14.85	15.81	16.99	18.55	21.03	23.34	24.05	26.22	28.30	30.32	32.91	34.82
13	15.98	16.98	18.20	19.81	22.36	24.74	25.47	27.69	29.82	31.88	34.53	36.48
14	17.12	18.15	19.41	21.06	23.68	26.12	26.87	29.14	31.32	33.43	36.12	38.11
15	18.25	19.31	20.60	22.31	25.00	27.49	28.26	30.58	32.80	34.95	37.70	39.72
16	19.37	20.47	21.79	23.54	26.30	28.85	29.63	32.00	34.27	36.46	39.25	41.33
17	20.49	21.61	22.98	24.77	27.59	30.19	31.00	33.41	35.72	37.95	40.79	42.88
18	21.60	22.76	24.16	25.99	28.87	31.53	32.35	34.81	37.16	39.42	42.31	44.43
19	22.72	23.90	25.33	27.20	30.14	32.85	33.69	36.19	38.58	40.88	43.82	45.97
20	23.83	25.04	26.50	28.41	31.41	34.17	35.02	37.57	39.50	42.34	45.31	47.50
21	24.93	26.17	27.66	29.62	32.67	35.48	36.34	38.93	41.40	43.78	46.80	49.01
22	26.04	27.30	28.82	30.81	33.92	36.78	37.66	40.29	42.80	45.20	48.27	50.51
23	27.14	28.43	29.98	32.01	35.17	38.08	38.97	41.64	44.18	46.62	49.73	52.00
24	28.24	29.55	31.13	33.20	36.42	39.36	40.27	42.98	45.56	48.03	51.18	53.48
25	29.34	30.68	32.28	34.38	37.65	40.65	41.57	44.31	46.93	49.44	52.62	54.95
26	30.43	31.79	33.43	35.56	38.89	41.92	42.86	45.64	48.29	50.83	54.05	56.41
27	31.53	32.91	34.57	36.74	40.11	43.19	44.14	46.96	49.64	52.22	55.48	57.86
28	32.62	34.03	35.71	37.92	41.34	44.46	45.42	48.28	50.99	53.59	56.89	59.30
29	33.71	35.14	36.85	39.09	42.56	45.72	46.69	49.59	52.34	54.97	58.30	60.73
30	34.80	36.25	37.99	40.26	43.77	46.98	47.96	50.89	53.67	56.33	59.70	62.16
40	45.62	47.27	49.24	51.81	55.76	59.34	60.44	63.69	66.77	69.70	73.40	76.09
50	56.33	58.16	60.35	63.17	67.50	71.42	72.61	76.15	79.49	82.66	86.66	89.56
60	66.98	68.97	71.34	74.40	79.08	83.30	84.58	88.38	91.95	95.34	99.61	102.7
80	88.13	90.41	93.11	96.58	101.9	106.6	108.1	112.3	116.3	120.1	124.8	128.3
100	109.1	111.7	114.7	118.5	124.3	129.6	131.1	135.8	140.2	144.1	149.4	153.2

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DELLA BINOMIALE $F(x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

n	x	p																		
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
19	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9996	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4856	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9860	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4980	0.2798	0.0982	0.0109
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.8009	0.5497	0.2265	0.0265
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9668	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9983	0.9637	0.8324	0.6511	0.4555	0.2825	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9997	0.9659	0.8324	0.6511	0.4555	0.2825	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9633	0.7973	0.6161	0.4145	0.2675	0.1569	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8011	0.6254	0.4125	0.2500	0.1419	0.0762	0.0329	0.0161	0.0075	0.0028	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.8613	0.6977	0.4895	0.3115	0.1759	0.0904	0.0423	0.0214	0.0109	0.0053	0.0021	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.8972	0.7486	0.5648	0.3929	0.2304	0.1222	0.0581	0.0284	0.0144	0.0075	0.0033	0.0011	0.0003	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0168	0.0086	0.0041	0.0017	0.0003	0.0000	
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0168	0.0086	0.0041	0.0017	0.0000	
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0168	0.0086	0.0041	0.0000	
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0168	0.0086	0.0000	
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0168	0.0000	
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0000	
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9694	0.8324	0.6656	0.4878	0.3238	0.1841	0.0885	0.0000	
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0813	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0000	
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9840	0.9790	0.9420	0.8694	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0573	0.0113	
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9566	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7938	0.5951	
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9988	0.9885	0.9612		



Table A10 Table of the F Distribution $F_{.95}$

$\frac{df_{num}}{df_{den}}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.0	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	18.00	18.10	18.25	18.20	18.32	18.35	18.37	18.38	18.40	18.41	18.43	18.45	18.46	18.46	18.47	18.48	18.49	18.50
3	10.13	9.65	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.98	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.36	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.25	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.10	2.99	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.44	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.04	2.00	1.95	1.91	1.86	1.81	1.75
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.63	2.51	2.43	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.24	2.20	2.13	2.05	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.23	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.17	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00



Table A10 Table of the F Distribution (continued) $F_{.975}$

df_{num} df_{den}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	700.5	851.2	959.0	991.5	997.5	998.2	998.7	999.3	999.6	999.7	999.8	999.9	999.9	1000	1000	1000	1000	1000
2	38.51	39.00	39.17	39.26	39.30	39.33	39.36	39.37	39.38	39.40	39.41	39.42	39.43	39.44	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	16.44	15.80	14.88	14.78	14.72	14.64	14.57	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	10.95	10.30	9.36	9.20	9.07	8.94	8.80	8.64	8.75	8.60	8.46	8.51	8.40	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.30	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.52	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.40	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.88	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.70	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.35	4.23	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.86	3.78	3.72	3.63	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.73	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.34	4.00	3.77	3.60	3.48	3.38	3.31	3.25	3.16	3.06	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.05	2.95	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.13	3.05	2.98	2.88	2.79	2.69	2.63	2.57	2.51	2.45	2.39	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.07	2.99	2.92	2.82	2.73	2.63	2.57	2.51	2.45	2.39	2.33	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.60	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.86	2.77	2.68	2.58	2.52	2.46	2.40	2.34	2.28	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.55	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.81	2.72	2.62	2.52	2.46	2.40	2.34	2.28	2.22	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.92	2.84	2.77	2.68	2.57	2.47	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.47	3.25	3.09	2.97	2.88	2.80	2.73	2.64	2.53	2.43	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.43	3.21	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	1.97
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.19	3.03	2.91	2.82	2.74	2.67	2.57	2.47	2.37	2.31	2.25	2.19	2.12	2.05	1.94
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.89
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.76	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.85
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.96	1.83
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.37	2.26	2.20	2.14	2.07	2.00	1.93	1.80
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.35	2.24	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.78
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.33	2.22	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.76
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.76	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.74
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.63	2.53	2.45	2.39	2.29	2.19	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.73	1.60
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.60	1.46
120	5.15	3.80	3.21	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.46	1.31
∞	5.03	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.65	1.57	1.49	1.41	1.34	1.17

