



7 COADIUTORI CON ORIENTAMENTO NELLE DISCIPLINE  
STATISTICHE E/O MATEMATICO-FINANZIARIE  
Let. C del bando del 30 gennaio 2013

Testo n. 2

**Probabilità e inferenza statistica**

1. Si illustri in generale il problema della costruzione di un test delle ipotesi fondato sul rapporto tra verosimiglianze per verificare l'ipotesi nulla  $H_0: \theta = \theta_0$  contro l'ipotesi alternativa  $H_1: \theta \neq \theta_0$  sulla base di un campione casuale bernoulliano di  $n$  elementi estratto da una popolazione  $X$  caratterizzata da una distribuzione  $f(x, \theta)$ .
2. Sia  $X$  una variabile casuale esponenziale negativa con funzione di densità:  
$$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0; \quad \theta > 0.$$
Si determini la funzione generatrice dei momenti e si calcolino il valor medio e la varianza della variabile casuale.
3. Sia  $X$  una popolazione caratterizzata dalla funzione di densità definita al punto 2 da cui viene estratto un campione casuale bernoulliano di  $n$  elementi. Si derivi la regione critica di ampiezza  $\alpha$  fondata sul rapporto tra verosimiglianze per verificare l'ipotesi nulla  $H_0: \theta = 1$  contro l'ipotesi alternativa  $H_1: \theta \neq 1$ .
4. Si specifichi, in generale, la disuguaglianza di Cramèr-Rao per la varianza di uno stimatore del parametro  $\theta$  di una popolazione caratterizzata dalla distribuzione  $f(x, \theta)$  e si discuta, inoltre, il significato di tale disuguaglianza.

**Econometria**

Sia

$$W = \alpha + \beta I + \gamma EL + \delta F + u$$

un modello di regressione in cui il salario (orario) di un lavoratore ( $W$ ) è posto in relazione con il numero di anni di istruzione ( $I$ ), gli anni di esperienza lavorativa presso l'azienda ( $EL$ ) e una variabile *dummy* che assume valore 1 se si tratta di una lavoratrice ( $F$ ) e 0 altrimenti. La variabile  $u$  costituisce il termine di errore. Si omette il pedice  $i$  per semplicità di notazione.

- a. Si supponga che la variabile relativa all'esperienza sia misurata con errore. Si mostri perché in questo caso si ha un problema di endogeneità e se ne discutano gli effetti sulla stima dei minimi



quadrati del coefficiente  $\gamma$ . Si illustrino in breve, oltre al caso descritto, ulteriori possibili cause di endogeneità rilevanti nelle applicazioni empiriche.

- b. Il metodo delle variabili strumentali (IV) costituisce una soluzione a cui spesso si fa ricorso. Si definiscano le proprietà che una variabile  $Z$  deve possedere per essere un buono strumento e si scriva la formula dello stimatore di  $\beta$  nel generico modello  $Y = X\beta + \varepsilon$ . Si mostri che l'errore standard di tale stimatore è sempre più ampio di quello dello stimatore dei minimi quadrati ordinari. Inoltre, si commenti il ruolo del coefficiente di determinazione della regressione di  $X$  su  $Z$  nella formulazione dell'errore standard dello stimatore IV.
- c. Si supponga che il modello sia stato stimato aggiungendo un'ulteriore variabile esplicativa: il quadrato dell'esperienza lavorativa ( $EL^2$ ). Si valuti a partire dai coefficienti stimati (vedi tabella seguente) l'effetto complessivo dell'esperienza sul salario.

reg W I EL EL<sup>2</sup> F

Source	SS	df	MS			
Model	32662.8703	4	8165.71758	Number of obs =	5820	
Residual	176268.771	5815	30.3127724	F( 4, 5815) =	269.38	
Total	208931.642	5819	35.9050768	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.1563	
				Adj R-squared =	0.1558	
				Root MSE =	5.5057	

  

W	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
I	.5118242	.0188718	27.12	0.000	.4748284	.5488199
EL	.2519736	.0226298	11.13	0.000	.2076108	.2963363
EL <sup>2</sup>	-.0036885	.0006111	-6.04	0.000	-.0048866	-.0024905
F	-1.005806	.1472019	-6.83	0.000	-1.294376	-.7172351
_cons	1.358203	.2701681	5.03	0.000	.8285725	1.887833

Fonte: dati dell'Indagine della Banca d'Italia sui Bilanci delle Famiglie Italiane, anno 2008.

- d. Si supponga che il salario orario dipenda anche dall'abilità del lavoratore ( $A$ ), che tale abilità sia osservabile e sia rispettata la seguente relazione:  $I = 7 + 5A$ . Si discuta la possibilità in questo caso specifico di stimare il modello con il metodo dei minimi quadrati ordinari e più in generale il problema della dipendenza lineare tra le variabili esplicative.

### Metodi quantitativi per la misurazione e gestione dei rischi

1. Si argomenti criticamente sul tema della valutazione dei titoli obbligazionari con e senza rischio di credito;
2. si descrivano le informazioni disponibili sul mercato relative al rischio di credito e di default;
3. si descriva formalmente il modello di Merton per la valutazione del rischio di credito e gli approcci valutativi alternativi, classificandoli in base alla logica valutativa, alle ipotesi e alle finalità di utilizzo. In particolare, si collochi con le dovute argomentazioni il modello di Merton in una delle due categorie dicotomiche (*through-the-cycle* o *point-in-time*) in cui possono essere classificati i modelli di stima del rischio di credito;



4. considerando il caso di un'impresa (a responsabilità limitata), che presenti un bilancio con attività  $V$  di valore corrente  $V_0 = € 100$  e con una passività rappresentata da uno zero coupon bond con scadenza  $T = 1$  anno e valore a scadenza  $D = € 80$ :
- si scomponga il pay-off a scadenza del debito rischioso  $Y_T = \min [V_T, D]$  in termini di opzione call o di opzione put e si interpreti il significato delle componenti dei due portafogli equivalenti dal punto di vista dell'impresa debitrice, del creditore e dell'azionista dell'impresa;
  - si calcoli il valore in  $t = 0$  del debito rischioso dell'impresa col modello di Merton, ipotizzando assenza di dividendi, una volatilità annua dell'attivo  $\sigma = 0,2$  e un tasso annuo non rischioso  $i = 4\%$ , dati i seguenti valori della funzione di ripartizione di una normale standard:  $N(d_1) = 0,92100$  e  $N(d_2) = 0,88721$ ;
  - si calcoli lo spread creditizio pagato dall'impresa sul suo debito.

### Aspetti operativi dell'intermediazione creditizia e finanziaria

I fondi patrimoniali costituiscono una risorsa soggetta a significative limitazioni per costi e disponibilità che spingono verso una loro gestione improntata a obiettivi di ottimizzazione del loro utilizzo. In questo contesto:

- si definisca il capitale economico, chiarendone le differenze rispetto al capitale regolamentare e spiegandone componenti e metodologie di quantificazione;
- si calcoli, specificando preventivamente la formula utilizzata, il capitale economico per unità di business (con correlazione tra rischi) e per singolo rischio (con correlazione tra unità di business) per un intermediario finanziario per il quale la funzione di *risk management* abbia fornito le seguenti stime di capitale economico e di correlazione fra i rischi di ciascuna unità:

Stime del capitale economico (€ milioni) delle unità di business							
	Unità di business						
	1	2					
Rischio di mercato	30	40					
Rischio di credito	70	80					
Rischio operativo	30	90					
Matrice della correlazione dei rischi							
	MR-1	CR-1	OR-1	MR-2	CR-2	OR-2	
MR-1	1,0	0,5	0,2	0,4	0,0	0,0	
CR-1	0,5	1,0	0,2	0,0	0,6	0,0	
OR-1	0,2	0,2	1,0	0,0	0,0	0,0	
MR-2	0,4	0,0	0,0	1,0	0,5	0,2	
CR-2	0,0	0,6	0,0	0,5	1,0	0,2	
OR-2	0,0	0,0	0,0	0,2	0,2	1,0	

Sapendo che il capitale economico complessivo (diversificato sia per rischi sia per unità di business) è di euro 203,22 milioni, e ipotizzando che le stime di capitale economico dei rischi delle singole unità di business siano state calcolate sulla base di modelli interni di rischio con intervalli di confidenza superiori ai minimi regolamentari (ad esempio, con un intervallo di confidenza del 99,97%, pari a circa 3,4 *standard deviation*, anziché a 99,9%, pari a circa 3



*standard deviation*), si richiede di considerare criticamente l'adeguatezza della stima del capitale economico complessivo con riferimento alla struttura delle correlazioni considerata, indicando in quale modo sia possibile giungere a una diversa, più prudente quantificazione;

3. si distribuisca il capitale economico complessivo di cui al punto 2 fra le due unità di business, utilizzando un approccio di tipo proporzionale e/o una tecnica di decomposizione del rischio di portafoglio basata sull'approccio "VaR incrementale";
4. si indichi la formula dell'indice RAROC (*risk-adjusted performance measure*) spiegandone sinteticamente il significato e le modalità di utilizzo a fini gestionali.

